多复变函数论基础

史济怀

高等教育出版社

（京）112号

内容提要

多复变函数理论是当代数学研究的主流方向之一，发展非常迅速．本书是学习多复变函数理论的一本入门教材．内容分为六章：多复变数全纯函数、全纯映射、正交系与 Bergman 核函数、Cauchy 积分公式、全纯凸域和拟凸域、$\bar{\partial}$问题及其应用．凡学过数学分析、线性代数、复变函数、实变函数及少许泛函分析的读者都能读懂本书，有了本书的知识，再深入到多复变的各个领域会方便得多．本书可作为数学系高年级学生和研究生的教材，也可作为相关领域研究人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

多复变函数论基础/史济怀编著．—北京：高等教育出版社，1996
ISBN 7-04-005547-3

Ⅰ．多…　Ⅱ．史…　Ⅲ．多复变函数论-基础理论　Ⅳ．O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第19016号

＊

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码：100009　传真：64014048　电话：64054588
新华书店总店北京发行所发行
北京联华印刷厂印装

＊

开本 850×1168　1/32　印张 10.625　字数 270 000
1996年5月第1版　1996年5月第1次印刷
印数 0001—963
定价：9.70元

序　言

1906 年 Hartogs 发现，在 n 个复变数的空间 $\mathbf{C}^n$ $(n>1)$ 中存在这样的域，在这种域中，每一个全纯函数都可全纯开拓到更大的域中去．球环 $\{(z_1, \cdots, z_n): r^2<|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<R^2\}$ 就是这样的域．在复平面上，这样的域是不存在的．多复变函数论在许多方面与单复变函数论有着本质的区别（上面提到的 Hartogs 现象只是其中之一），这些区别使得在研究单复变函数时行之有效的工具和方法，在研究多复变函数时不再适用．于是，在多复变函数的研究工作中，不断出现新的工具和方法．许多现代数学（例如，偏微分方程、泛函分析、微分几何、代数几何、李群等）的概念和方法常被用来解决多复变中的问题，面多复变的发展又推动着这些学科的发展．

鉴于多复变函数论在近代数学中的重要地位，一些高等学校希望把它作为数学系高年级本科生的选修课，或低年级研究生的基础课．编写本书的目的就是想为这个课程提供一本入门教材．

本书的第一章介绍多复变数全纯函数的基本性质，阐明 Hartogs 现象是如何发生的．特别是，通过引入次调和函数来证明重要的 Hartogs 定理．第一章的内容是全书的基础．第二章介绍全纯映射的基本性质．除了介绍 H. Cartan 定理和球的全纯自同构等基本内容外，还特别介绍了多圆柱和球上的星形映射和凸映射，以及与之有关的增长定理和偏差定理．这里有不少是我国学者最近获得的新结果．第三章介绍经典的 Bergman 核函数．特别介绍了

我国已故著名数学家华罗庚教授关于计算四类典型域的核函数的方法. 多复变数 Cauchy 积分公式与单复变数 Cauchy 积分公式有着本质的区别. 一般说来，全纯函数在部分边界上的值就能确定它在域内的值，而且不同的域有不同的 Cauchy 积分公式. 第四章专门讨论这个问题. 这里也特别介绍了华罗庚教授在这方面的杰出工作. 第四章最后介绍了 Bochner-Martinelli 积分公式，它的作用之一是为第六章构造全纯的 Henkin 核埋下伏笔. 第五章介绍全纯凸域的 Cartan-Thullen 理论，Levi 拟凸域和拟凸域，以及强拟凸域的基本知识，并讨论了它们和全纯域的关系，从而引出了重要的 Levi 问题. 第六章介绍 $\bar{\partial}$ 问题及其应用，证明 $\bar{\partial}$ 问题在拟凸域上是有解的，从而证明了 Levi 猜测. 最后给出了强拟凸域上 $\bar{\partial}$ 问题解的一致估计.

本书是作为多复变函数论的一本入门教材来编写的，凡具有数学分析、线性代数、复变函数、实变函数以及少许泛函分析知识的读者都能读懂本书（凡涉及到上述内容以外的知识，诸如微分形式和 Stokes 公式、弱导数和 Sobolev 空间等，书中都作了专门的介绍）. 有了本书的知识作为基础，再深入到多复变的各个领域就会方便得多. 希望有志于进入多复变研究领域的青年能从本书中得到一些帮助.

作者曾多次为中国科学技术大学基础数学的研究生讲授多复变函数论. 本书是在这些讲稿的基础上编写的，以后又在既有高年级本科生又有研究生参加的班上讲授过. 在教学过程中，学生们提出的问题和建议使作者改进了某些内容的讲法，在此作者向他们表示感谢.

参加 1994 年理科数学与力学教学指导委员会分析与函数论教材建设组会议的专家，特别是本书的主审人复旦大学张锦豪教授，仔细审阅了本书的初稿，提出了很多宝贵的意见，对本书的修改提供了有益的帮助. 对此，作者对他们表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，书中的缺点错误在所难免，希望得到读者的批评指正.

史济怀

1995 年 3 月

于中国科学技术大学

目　录

第一章　多复变数全纯函数

§1.1　全纯函数

1.1.1　全纯函数的定义

我们用 $\mathbf{C}$ 表示复数域，$\mathbf{C}^n$ 表示复数域上的线性空间：

$$\mathbf{C}^n=\{(z_1,\ \cdots,\ z_n):\ z_j\in\mathbf{C},\ j=1,\ \cdots,\ n\}.$$

设 $z=(z_1,\ \cdots,\ z_n)$，$w=(w_1,\ \cdots,\ w_n)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中两个点，定义它们的内积为

$$\langle z,\ w\rangle=\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{w}_j,$$

由此产生 z 的模为 $|z|=\langle z,\ z\rangle^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 这样 $\mathbf{C}^n$ 就是一个 n 维 Hilbert 空间.

$\mathbf{C}^n$ 中的连通开集 Ω 称为**域**. 当 Ω 有界时，就称 Ω 为**有界域**. 下面两类简单的有界域值得我们特别注意.

设 $a=(a_1,\ \cdots,\ a_n)\in\mathbf{C}^n$，$r=(r_1,\ \cdots,\ r_n)$，$r_j>0$，$j=1,\ \cdots,\ n$，称

$$P(a,r)=\{(z_1,\ \cdots,\ z_n):\ |z_j-a_j|<r_j,\ j=1,\ \cdots,\ n\}$$

为以 a 为中心、r 为半径的**多圆柱**. 特别，当 $a=0$，$r_j=1$，$j=1,\ \cdots,\ n$ 时，称它为单位多圆柱，记为 U^n，即

$$U^n=\{(z_1,\ \cdots,\ z_n):\ |z_j|<1,\ j=1,\ \cdots,\ n\}.$$

显然，当 $n=1$ 时，它就是单位圆盘.

以 $a=(a_1,\ \cdots,\ a_n)$ 为中心，$\rho>0$ 为半径的**球**是指

$$B(a,\rho)=\{(z_1,\cdots,z_n):\sum_{j=1}^{n}|z_j-a_j|^2<\rho^2\}.$$

特别，当 $a=0$，$\rho=1$ 时，称它为单位球，记为 B_n，即

$$B_n=\{(z_1,\cdots,z_n):\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2<1\}.$$

当 $n=1$ 时，它也是单位圆盘.

U^n 和 B_n 都是单位圆盘在 $\mathbf{C}^n$ 中的推广. 下面我们将看到（见定理 2.3.9 和定理 2.5.15），它们不是全纯等价的. 因此，U^n 和 B_n 上的函数论有很大的区别.

为了引进全纯函数的概念，我们要讨论多重幂级数的性质. 先从多重级数讲起.

给定依赖两个指标的数列 $\{a_{jk}\}$，称 $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty}a_{jk}$ 为**二重级数**，数 $S_{m,n}=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}$ 称为它的部分和. 如果 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}S_{m,n}=S$ 存在，就说上述二重级数收敛，S 是它的和.

用同样的方法可以定义一般**多重级数**收敛的概念.

级数

$$\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(z_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-a_n)^{\alpha_n}$$

称为 **n 重幂级数**，它在点 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 收敛是指 n 重级数

$$\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(b_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(b_n-a_n)^{\alpha_n}$$

收敛.

关于多重幂级数，也有类似于单变数中的 Abel 定理. 为简单起见，我们讨论 $a=0$ 的情形.

命题 1.1.1 如果 n 重幂级数

$$\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n} \tag{1}$$

在点 $b=(b_1, \cdots, b_n)$ 收敛，这里 $b_j\neq 0$，$j=1, \cdots, n$，那么它在闭多圆柱

$$\overline{P}(0, r) = \{(z_1, \cdots, z_n): |z_j|\leqslant r_j, j=1, \cdots, n\}$$

中绝对且一致收敛，这里 $r=(r_1, \cdots, r_n)$，$r_j<|b_j|$，$j=1, \cdots, n$.

证 因为幂级数 $\sum\limits_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1\cdots\alpha_n} b_1^{\alpha_1}\cdots b_n^{\alpha_n}$ 收敛，所以存在常数 M，使得对任意 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n\geqslant 0$，有

$$|a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}|\leqslant\frac{M}{|b_1|^{\alpha_1}\cdots|b_n|^{\alpha_n}}.$$

故当 $|z_j|\leqslant r_j<|b_j|$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 时，

$$\left|a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}\right|\leqslant M\left|\frac{z_1}{b_1}\right|^{\alpha_1}\cdots\left|\frac{z_n}{b_n}\right|^{\alpha_n}\leqslant M\left(\frac{r_1}{|b_1|}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{r_n}{|b_n|}\right)^{\alpha_n},$$

于是

$$\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}|a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}|\leqslant M\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{|b_1|}\right)^{\alpha_1}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}\left(\frac{r_n}{|b_n|}\right)^{\alpha_n}$$

$$=M\left(1-\frac{r_1}{|b_1|}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{r_n}{|b_n|}\right)^{-1}. \qquad \square$$

为简化记号，我们采用下面的习惯记法. 对于有序数组 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，其中 α_j 都是非负整数，记

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n, \quad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!, \quad z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n},$$

其中 $z=(z_1, \cdots, z_n)$. 这样，幂级数 (1) 就可简记为 $\sum\limits_{\alpha} a_\alpha z^\alpha$ 或者 $\sum\limits_{\alpha\geqslant 0} a_\alpha z^\alpha$.

定义 1.1.2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$f: \Omega\to\mathbf{C}$ 是定义在 Ω 上的一个复值函数. 如果对每一点 $a\in\Omega$，存在多圆柱 $P(a,\rho)\subset\Omega$ 和幂级数 $\sum\limits_{\alpha} c_\alpha (z-a)^\alpha$，使得

$$f(z)=\sum_{\alpha} c_\alpha(z-a)^\alpha \tag{2}$$

在 $P(a,\rho)$ 中成立，则称 f 为 Ω 中的**全纯函数**.

我们用 $H(\Omega)$ 记 Ω 上全纯函数所成的集.

设 $f\in H(\Omega)$，则对每个 $a\in\Omega$，(2) 在 a 附近成立. 容易看出

$$\left.\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\right|_{z=a}=\alpha\,!\,c_\alpha.$$

如果记

$$(D^\alpha f)(a)=\left.\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\right|_{z=a},$$

那么 f 在 a 点的展开式 (2) 可写为

$$f(z)=\sum_\alpha\frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha\,!}(z-a)^\alpha.$$

1.1.2 Cauchy-Riemann 方程组

设 $f=u+iv\in H(\Omega)$. 当固定 z_1, $\cdots$, z_{j-1}, z_{j+1}, $\cdots$, z_n 时，记

$$D_j=\{z_j\in\mathbf{C}:(z_1,\cdots,z_{j-1},z_j,z_{j+1},\cdots,z_n)\in\Omega\},$$

那么 $z_j\to f$ $(z_1,\ \cdots,\ z_{j-1},\ z_j,\ z_{j+1},\ \cdots,\ z_n)$ 作为单变数函数在 D_j 中全纯，因而有 Cauchy-Riemann 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\partial v}{\partial y_j},\quad \frac{\partial u}{\partial y_j}=-\frac{\partial v}{\partial x_j},$$

其中 $z_j=x_j+iy_j$.

引进记号：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_j}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\\ \frac{\partial}{\partial \bar z_j}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\end{aligned}\tag{3}$$

那么上面的 Cauchy-Riemann 方程可写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar z_j}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(u+iv)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}+\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)=0,\quad j=1,\cdots,n,\end{aligned}$$

称它为 Cauchy-Riemann 方程组.

下面我们将证明，如果$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0$ 在 D_j ($j=1, \cdots, n$) 上成立，那么 $f\in H(\Omega)$. 这就是著名的 Hartogs 定理（定理 1.5.14).

1.1.3 唯一性定理

在单复变中有如下的唯一性定理："设 G 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的域，$f\in H(G)$. 如果点列 $\{z_k\}$ 在 G 中有聚点，且 $f(z_k)=0$, $k=1, 2, \cdots$, 那么 f 在 G 上恒等于 0." 这样的唯一性定理在多复变中不再成立. 例如，$f(z_1, z_2)=z_1z_2$ 在双圆柱 $\{(z_1, z_2): |z_1|<1, |z_2|<1\}$ 中全纯，点列 $\left\{\left(0, \frac{1}{k}\right)\right\}$, $k=2, 3, \cdots$, 以 $(0, 0)$ 为聚点，且 $f\left(0, \frac{1}{k}\right)=0$, 但 f 在双圆柱中不恒等于 0. 在多复变中有下面的

定理 1.1.3（唯一性定理） 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$f\in H(\Omega)$. 如果 f 在非空开集 $E\subset\Omega$ 上恒等于 0，那么 f 在 Ω 上恒等于 0.

证 命 $K=\{z\in\Omega: (D^\alpha f)(z)=0, \text{对所有 } \alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}$,

$K_\alpha=\{z\in\Omega: (D^\alpha f)(z)=0, \text{对某个 } \alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}$.

由假定 $E\subset K$，所以 K 不是空集. 显然 $K=\bigcap\limits_\alpha K_\alpha$. 因为 $D^\alpha f$ 是连续函数，所以 K_α 是闭集，因而 K 也是闭集. 任取 $a\in K$，因为 f 在 Ω 中全纯，故存在多圆柱 $P(a, r)\subset\Omega$, 使得

$$f(z)=\sum_\alpha\frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha=0$$

在 $P(a, r)$ 中成立，因而 $P(a, r)\subset K$，这说明 K 是一个开集. 由于 $\Omega-K$ 也是开集，下面的等式

$$\Omega=K\cup(\Omega-K)$$

和 Ω 的连通性矛盾，因为 K 不是空集，故只能 $\Omega=K$，即 f 在 Ω 上恒等于 0. □

作为唯一性定理的应用，我们可以证明下面的

定理 1.1.4（开映射定理） 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，f 是 Ω 上的非常数的全纯函数，那么 f 把 Ω 中的开集映成 $\mathbf{C}$ 中的开集.

证 $n=1$ 时，定理是成立的. 现设 $n>1$. 设 $a\in\Omega$，命 Q 为 a 的一个凸邻域（例如可以取 Q 为包含 a 的多圆柱），$Q\subset\Omega$. 由定理 1.1.3 知，f 在 Q 上不能恒等于 $f(a)$，故能找到 $b\in Q$，使得 $f(a)\neq f(b)$. 命 $D=\{\lambda\in\mathbf{C}: a+\lambda(b-a)\in Q\}$，显然 D 非空，且由于 Q 是开集，D 也是 $\mathbf{C}$ 中的开集. 命

$$g(\lambda)=f(a+\lambda(b-a)),\quad \lambda\in D,$$

则 g 是 D 上的全纯函数，且 $g(0)=f(a)\neq f(b)=g(1)$，即 g 不是常数. 利用单复变的结果，$g(D)$ 是包含 $g(0)$ 的一个开集，而 $g(D)\subset f(Q)$，所以 $f(Q)$ 是一个开集. □

利用开映射定理又可得到下面的最大模原理.

定理 1.1.5（最大模原理） 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，f 是 Ω 上的非常数的全纯函数，那么 f 的模不可能在 Ω 的内点达到最大值.

证 如果存在 $a\in\Omega$，使得 $|f(z)|\leqslant|f(a)|$ 对所有 $z\in\Omega$ 成立. 根据定理 1.1.4，$f(\Omega)$ 是开集，它含在圆盘 $\{|w|\leqslant|f(a)|\}$ 之中，但因是开集，必含在 $\{|w|<|f(a)|\}$ 之中，这就导致 $|f(a)|<|f(a)|$ 的矛盾. □

§1.2 多圆柱的 Cauchy 积分公式及其应用

1.2.1 多圆柱的 Cauchy 积分公式

在单复变中，Cauchy 积分公式的重要性是众所周知的，对于不同的域，Cauchy 积分公式有相同的形式. 但在多复变中，情况则复杂得多，对于不同的域，有不同的 Cauchy 积分公式. 下面先给出多圆柱上的 Cauchy 积分公式.

定理 1.2.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$f\in H(\Omega)$. 如果$\overline{P}(a,r)\subset\Omega$，则对 $z\in P(a,r)$，我们有

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\cdot\int_{|\zeta_1-a_1|=r_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n. \tag{1}$$

证 当 $n=1$ 时，这是熟知的圆盘上的 Cauchy 积分公式. 今设定理对 $n-1$ 个变数的全纯函数成立. 分别在圆周 $|\zeta_2-a_2|=r_2$，$\cdots$，$|\zeta_n-a_n|=r_n$ 上固定 ζ_2，$\cdots$，ζ_n，则 $f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$ 是圆盘 $|\zeta_1-a_1|\leqslant r_1$ 上的全纯函数，由单复变的 Cauchy 积分公式得

$$f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1-a_1|=r_1}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1 \tag{2}$$

对函数 $(z_2,\cdots,z_n)\to f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 用归纳法的假定，并用 (2) 即得

$$\begin{aligned}f(z_1,\cdots,z_n)&=\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{|\zeta_2-a_2|=r_2}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_2\cdots d\zeta_n\\&=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-a_1|=r_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.\end{aligned}$$

□

如果记 $D_j=\{z_j\in\mathbf{C}:|z_j-a_j|<r_j\}$，那么多圆柱 $P(a,r)$ 是这 n 个圆盘的拓扑积：

$$P(a,r)=D_1\times\cdots\times D_n.$$

它的边界 ∂P 由若干部分组成. 例如，$\partial D_1\times D_2\times\cdots\times D_n$，$\partial D_1\times\partial D_2\times D_3\times\cdots\times D_n$，$\cdots$，$\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n$ 都是它的边界的组成部分，其中最低维的那一部分

$$\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n=\{(z_1,\cdots,z_n):|z_j-a_j|=r_j,\ j=1,\ \cdots,\ n\}$$

称为 $P(a,r)$ 的**特征边界**，记为 $\partial_0 P$.

多圆柱的 Cauchy 积分公式 (1) 的积分区域不是 $P(a,r)$ 的全部边界，而只是它的边界的一部分——特征边界. 这是多复变与单复变的一个重要区别. 在单复变中，Cauchy 积分公式的积分是在全部边界上进行的.

从多圆柱的 Cauchy 积分公式可以得到下面一些重要结论.

定理 1.2.2 设 f 在多圆柱 $P(a,r)$ 中全纯，则 f 可在 $P(a,r)$ 中展开为

$$f(z)=\sum_{\alpha}\frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha,\quad z\in P(a,r).$$

证 取多圆柱 $P(a,\rho)$，使得 $\bar{P}(a,\rho)\subset P(a,r)$，则由定理 1.2.1，对 $z\in P(a,\rho)$ 有

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-a_1|=\rho_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=\rho_n}\frac{f(\zeta)}{\prod_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n, \tag{3}$$

由此得

$$(D^\alpha f)(z)=\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\cdot\int_{|\zeta_1-a_1|=\rho_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=\rho_n}\frac{f(\zeta)}{\prod_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)^{\alpha_j+1}}d\zeta_1\cdots d\zeta_n. \tag{4}$$

取 $\rho'=(\rho'_1,\ \cdots,\ \rho'_n)$，使 $\rho'_j<\rho_j$ $(j=1,\ \cdots,\ n)$. 于是，当 $z\in\bar{P}(a,\rho')$，$|\zeta_j-a_j|=\rho_j$ $(j=1,\ \cdots,\ n)$ 时，有

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)}=\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}\frac{(z_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-a_n)^{\alpha_n}}{(\zeta_1-a_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\zeta_n-a_n)^{\alpha_n+1}} \tag{5}$$

且级数对 ζ 是一致收敛的. 在 (5) 的两端乘以 $f(\zeta)$，并对 ζ 在

$\{|\zeta_j-a_j|=\rho_j,\ j=1,\cdots,n\}$ 上积分，再利用（3）和（4），即得

$$f(z)=\sum_{\alpha}(z_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-a_n)^{\alpha_n}\frac{1}{(2\pi i)^n}$$

$$\cdot\int_{|\zeta_1-a_1|=\rho_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=\rho_n}\frac{f(\zeta)}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-a_j)^{\alpha_j+1}}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

$$=\sum_{\alpha}\frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha.$$

由于 ρ'_j 可任意接近 ρ_j，ρ_j 可任意接近 r_j，故上式在 $P(a,r)$ 中成立. □

这个定理断言，多圆柱上的全纯函数在整个多圆柱上有一个统一的幂级数表达式. 以后我们将看到，这样的表达式可以在更一般的域上成立（见定理 1.3.3).

如果在 Cauchy 积分公式（1）中对 z 求导数，可得

$$(D^\alpha f)(a)=\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 P}\frac{f(\zeta)}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-a_j)^{\alpha_j+1}}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

由此可以得到下面有用的 Cauchy 不等式.

定理 1.2.3 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$\overline{P}(a,r)\subset\Omega$. 如果 $f\in H(\Omega)$，记 $M=\sup\{|f(\zeta)|:\zeta\in\partial_0 P\}$，那么

$$|(D^\alpha f)(a)|\leqslant M\frac{\alpha!}{r^\alpha}. \tag{6}$$

证 从上面的等式即得

$$|(D^\alpha f)(a)|\leqslant\frac{\alpha!}{(2\pi)^n}\int_{\partial_0 P}\frac{|f(\zeta)|}{\prod_{j=1}^{n}|\zeta_j-a_j|^{\alpha_j+1}}|d\zeta_1|\cdots|d\zeta_n|$$

$$\leqslant\frac{\alpha!}{(2\pi)^n}\frac{M}{\prod_{j=1}^{n}r_j^{\alpha_j+1}}(2\pi)^n r_1\cdots r_n=M\frac{\alpha!}{r^\alpha}. \qquad \square$$

注意，因为 f 在多圆柱 $P(a,r)$ 中全纯，由定理 1.2.2 知道，

f 可在 $P(a,r)$ 中展开成幂级数

$$f(z) = \sum_{\alpha} \frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!} (z-a)^\alpha = \sum_{\alpha} a_\alpha (z-a)^\alpha.$$

实际上，不等式（6）给出了展开式系数的估计：

$$|a_\alpha| = \frac{|(D^\alpha f)(a)|}{\alpha!} \leqslant \frac{M}{r^\alpha}.$$

1.2.2 Weierstrass 定理

利用 Cauchy 不等式可以得到一个用 f 的模来控制它的导数 $D^\alpha f$ 的模的不等式. 先引进

定义 1.2.4 如果 Ω 的子集 G 满足：(i) $\overline{G} \subset \Omega$；(ii) $\overline{G}$ 是紧的，就称 G **相对于 Ω 是紧的**，记为 $G \subset\subset \Omega$.

我们有下面的

定理 1.2.5 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$f \in H(\Omega)$. 如果紧集 K 及其邻域 G 满足条件 $K \subset G \subset\subset \Omega$，那么有不等式

$$\sup_{z\in K} |(D^\alpha f)(z)| \leqslant C_\alpha \sup_{z\in G} |f(z)|, \tag{7}$$

这里 C_α 是与 K，G 及 α 有关的常数.

证 因为 $\rho = d(K, \partial G) > 0$，所以以 K 中任何点 a 为中心，ρ 为半径的多圆柱

$$P = \{(z_1, \cdots, z_n) : |z_j - a_j| < \rho, \ j = 1, \ \cdots, \ n\}$$

都含在 G 中. 于是，由 Cauchy 不等式

$$|(D^\alpha f)(a)| \leqslant \sup_{\zeta \in \partial_0 P} |f(\zeta)| \frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}} \leqslant C_\alpha \sup_{z\in G} |f(z)|.$$

由此即得所要证的不等式. □

不等式（7）很简单，而且还有许多应用. 下面关于函数列的 Weierstrass 定理和正规族理论都要用到它.

定理 1.2.6（Weierstrass）设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$\{f_k\}$ 是 Ω 上一列全纯函数. 如果它在 Ω 上内闭一致收敛于 f，那么 $f \in H(\Omega)$，而且 $\{D^\alpha f_k\}$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 $D^\alpha f$.

证 对于任意的$a\in\Omega$,我们证明f在a点附近能展开成幂级数. 适当选取$\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$,使得$\overline{P}(a,\rho)\subset\Omega$. 对$f_k$用Cauchy积分公式:

$$f_k(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 P}\frac{f_k(\zeta)}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n,\quad z\in P(a,\rho).$$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(\zeta)=f(\zeta)$ 在$\partial_0 P$上一致成立，在上式中命$k\to\infty$，即得

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 P}\frac{f(\zeta)}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n,\quad z\in P(a,\rho).$$

由于

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)}=\sum_{\alpha}\prod_{j=1}^{n}\frac{(z_j-a_j)^{\alpha_j}}{(\zeta_j-a_j)^{\alpha_j+1}}$$

对$\zeta\in\partial_0 P$一致地成立，因而有

$$f(z)=\sum_{\alpha}\left\{\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 P}\frac{f(\zeta)d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-a_j)^{\alpha_j+1}}\right\}(z-a)^{\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha}c_{\alpha}\ (z-a)^{\alpha},$$

所以$f\in H(\Omega)$.

对于任意紧集$K\subset\Omega$，取其邻域G，使得$K\subset G\subset\subset\Omega$. 因为$\overline{G}$是紧的，故对$\varepsilon>0$，存在$k_0$，当$k>k_0$时，有$\sup\limits_{z\in\overline{G}}|f_k(z)-f(z)|<\varepsilon$. 于是，由定理1.2.5得

$$\sup_{z\in K}|D^{\alpha}(f_k-f)(z)|\leqslant C_{\alpha}\sup_{z\in\overline{G}}|f_k(z)-f(z)|<C_{\alpha}\varepsilon.$$

这正好说明$D^{\alpha}f_k$在Ω上内闭一致收敛于$D^{\alpha}f$. □

1.2.3 Montel 定理

现在把单复变中的正规族理论推广到多复变.

定义 1.2.7 设 $F=\{f\}$ 是域 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上的一个全纯函数族. 如果它的任意序列 $\{f_k\}\subset F$ 中一定包含一个在 Ω 上内闭一致收敛的子列，就称 F 是 Ω 上的一个**正规族**.

定义 1.2.8 设 $F=\{f\}$ 是域 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上的一个全纯函数族. 如果对任意紧集 $K\subset\Omega$，存在常数 $M(K)$，使得 $|f(z)|\leqslant M(K)$ 对任意的 $z\in K$ 及 $f\in F$ 成立，就称 F 是**局部一致有界的**.

类似于单复变的情形，我们有下面的

定理 1.2.9(Montel) 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，Ω 上的全纯函数族 F 是 Ω 上的正规族的充分必要条件是 F 在 Ω 上局部一致有界.

证 必要性 如果 F 是 Ω 上的正规族，但它并不局部一致有界，则必存在紧集 $K\subset\Omega$，使得

$$\sup\{|f(z)|;z\in K,\ f\in F\}=\infty.$$

因而存在 $f_k\in F$，使得 $\sup\{|f_k(z)|;z\in K\}\geqslant k$. 由于 F 是正规族，故必存在 $\{f_k\}$ 的子列 $\{f_{k_\nu}\}$，它在 Ω 上内闭一致收敛于 f，因面存在 ν_0，当 $\nu>\nu_0$ 时，在 K 上存在不等式

$$|f_{k_\nu}(z)-f(z)|<1.$$

f 在 K 上当然是有界的，不妨设 $|f(z)|\leqslant M$ $(z\in K)$. 于是，当 $z\in K$ 及 $\nu>\nu_0$ 时，便有

$$|f_{k_\nu}(z)|\leqslant|f_{k_\nu}(z)-f(z)|+|f(z)|\leqslant M+1,$$

这就导致 $k_\nu\leqslant M+1$ 的矛盾.

充分性 如果 F 在 Ω 上局部一致有界，任取 $\{f_k\}\subset F$，我们证明必能从 $\{f_k\}$ 中取出一个子列，它在 Ω 上内闭一致收敛. 为此取紧集 $K\subset G\subset\subset\Omega$，由定理 1.2.5 得

$$\sup_K\left|\frac{\partial f_k}{\partial z_j}\right|\leqslant C,\ \sup_G|f_k|\leqslant M(K),$$

即 $\dfrac{\partial f_k}{\partial z_j}$ 局部一致有界，因而 $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}$，$\dfrac{\partial f_k}{\partial y_j}$ 也局部一致有界. 把 f_k 的实部、虚部分开，分别应用中值公式，便知 $\{f_k\}$ 在 K 上是等度连续的.

又因为它在 K 上是一致有界的，故由 Arzela Ascoli 定理，能在 $\{f_k\}$ 中取出在 K 上一致收敛的子列. 为了能在 $\{f_k\}$ 中取出在 Ω 上内闭一致收敛的子列，取一列紧集 K_j，使得

$$K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_j\subset\cdots\rightarrow\Omega.$$

根据上面的讨论，对每个 K_j，均能从 $\{f_k\}$ 中取出在其上一致收敛的子列，再用 Cantor 的对角线法，即可取出一个在每个 K_j 上都一致收敛的子列，这个子列在 Ω 上是内闭一致收敛的. □

1.2.4 Hurwitz 定理

作为这一节的结尾，我们把单复变中的 Hurwitz 定理推广到多复变.

定理 1.2.10 (Hurwitz)　设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，f_k 是 Ω 上一列处处不为 0 的全纯函数. 如果 f_k 在 Ω 上内闭一致收敛于 f，那么 f 在 Ω 中或者恒等于 0，或者处处不等于 0.

证　设 $f\not\equiv 0$. 任取 $a\in\Omega$，我们证明 $f(a)\neq 0$. 取多圆柱 $P(a, r)\subset\Omega$，再取数 α_1, …, α_n 和 λ，使得 $|\alpha_j|<r$, $|\lambda|<1$. 于是 $(a_1+\alpha_1\lambda, \cdots, a_n+\alpha_n\lambda)\in P(a,r)\subset\Omega$. 在满足上述条件的 α_j 中选取一组，使得

$$\psi(\lambda)=f(a_1+\alpha_1\lambda,\ \cdots,\ a_n+\alpha_n\lambda)$$

在 $|\lambda|<1$ 中不恒等于 0，这一定能办到，否则 f 在 $P(a, r)$ 中恒等于 0. 命

$$\psi_k(\lambda)=f_k(a_1+\alpha_1\lambda,\ \cdots,\ a_n+\alpha_n\lambda).$$

于是，ψ_k 在 $|\lambda|<1$ 中内闭一致收敛于 ψ，且 ψ 不恒等于 0. 由单复变的 Hurwitz 定理，ψ 在 $|\lambda|<1$ 中处处不等于 0. 特别 $\psi(0)\neq 0$，即 $f(a)\neq 0$. □

§1.3 Hartogs 现 象

1.3.1 Hartogs 现象

设 D 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的域，f 是 D 上的全纯函数. 如果存在域 $G \supset D$ 和 G 上的全纯函数 F，使得当 $z \in D$ 时，$F(z) = f(z)$，我们就说 F 是 f 在域 G 上的**全纯开拓**，或者说 f 能全纯开拓到更大的域 G 上去.

我们问，是否存在这样的域 $D \subset \mathbf{C}$，在其上的每一个全纯函数都能全纯开拓到比 D 更大的域上去？答案是否定的，因为对 ∂D 上任意一点 a，$f(z) = \frac{1}{z-a}$是 D 上的全纯函数，但它不能越过 a 开拓出去.

但是在多复变中出现了一种奇怪的现象，确实存在这样的域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$，$n > 1$，$H(\Omega)$中所有的函数都能全纯开拓到比 Ω 更大的域上去. Hartogs 首先发现了这种现象，故名之为 Hartogs 现象. 下面就是这种现象的一个简单的例子.

设 $0 < \alpha$，$\beta < 1$，记

$$G_1 = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 : |z| < 1,\ \beta < |w| < 1\},$$

$$G_2 = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 : |z| < \alpha,\ |w| < 1\},$$

$$G = G_1 \cup G_2.$$

我们证明 $H(G)$中每一个函数都能全纯开拓到比 G 更大的单位双圆柱域：

$$U^2 = \{(z, w) : |z| < 1,\ |w| < 1\}.$$

任取 $f \in H(G)$，它当然也是 G_1 上的全纯函数. 固定 z $(|z| < 1)$，则 $w \to f(z,w)$是圆环 $\beta < |w| < 1$ 中的全纯函数，因而有 Laurent 展开式

$$f(z,w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z) w^k,\quad \beta < |w| < 1, \tag{1}$$

这里

$$a_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho} f(z,w)w^{-k-1}dw,$$

$$\beta<\rho<1,\quad |z|<1.$$

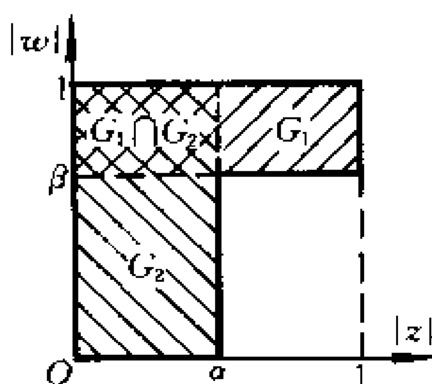


图 1

所以 $a_k(z)$ 在 $|z|<1$ 中全纯. 另一方面, f 是 G_2 中的全纯函数, 当固定 z ($|z|<\alpha$) 时, $w\to f(z,w)$ 是单位圆盘 $|w|<1$ 中的全纯函数, 因而有 Taylor 展开式

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z)w^k,\ |z|<\alpha,\ |w|<1, \tag{2}$$

由于 (1), (2) 两级数在 $G_1\cap G_2$ 中相等, 所以

$$a_k(z)=b_k(z),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因而当 $|z|<\alpha$ 时, $a_k(z)=0$, $k=-1,-2,\cdots$, 但因 $a_k(z)$ 在 $|z|<1$ 中全纯, 故由唯一性定理得

$$a_k(z)=0,\ k=-1,\ -2,\ \cdots,\ |z|<1.$$

这样 $f(z,w)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z)w^k$ 在 G 中成立. 设 $a_k(z)$ 在 $|z|<1$ 中的 Taylor 展开式为 $a_k(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_{jk}z^j$, 故有

$$f(z,w)=\sum_{j,k=0}^{\infty}c_{jk}z^jw^k \tag{3}$$

在 G 中成立. 因为 (3) 右端的二重级数当 $|z|<1$, $\beta<|w|<1$ 时收敛, 故由命题 1.1.1 知道, 它在 $|z|<1$, $|w|<1$ 中收敛. 今定义

$$F(z,w)=\sum_{j,k=0}^{\infty}c_{jk}z^jw^k,$$

它是 U^2 中的全纯函数, 且在 G 中 $F=f$, 因而它是 f 在 U^2 中的全纯开拓.

1.3.2 全纯函数在 Reinhardt 域上的展开式

为了进一步说明 Hartogs 现象，我们给出全纯函数在 Reinhardt 域上的展开式.

定义 1.3.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域. 如果对任意 $(z_1, \cdots, z_n) \in \Omega$ 及 $\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbf{R}$（以 $\mathbf{R}$ 表示实数域）必有 $(e^{i\theta_1}z_1, \cdots, e^{i\theta_n}z_n) \in \Omega$，就称 Ω 为 Reinhardt 域.

例如多圆柱、球以及上例提到的域 G 都是 Reinhardt 域.

定理 1.3.2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的 Reinhardt 域，则 Ω 上任意全纯函数 f 必有如下的 Laurent 展开式

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} a_\alpha z^\alpha, \tag{4}$$

这里 $\mathbf{Z}^n = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n): \alpha_j \in \mathbf{Z}, j=1, \cdots, n\}$（$\mathbf{Z}$ 表示全体整数所成的集合），该级数在 Ω 中内闭一致收敛，且 a_α 由 f 所唯一确定.

证 我们先证，如果 (4) 在 Ω 上内闭一致收敛，那么 a_α 由 f 所唯一确定. 事实上，取 $w \in \Omega$，要求 w 的每个坐标 $w_j \neq 0$. 对于这个固定的 w，取 $z = (e^{i\theta_1}w_1, \cdots, e^{i\theta_n}w_n)$，则 $z \in \Omega$. 于是

$$f(e^{i\theta_1}w_1, \cdots, e^{i\theta_n}w_n) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} a_\alpha w_1^{\alpha_1} \cdots w_n^{\alpha_n} e^{i(\theta_1\alpha_1 + \cdots + \theta_n\alpha_n)},$$

两端乘以 $e^{-i(\theta_1\alpha_1 + \cdots + \theta_n\alpha_n)}$，并分别对 $\theta_1, \cdots, \theta_n$ 在 $(0, 2\pi)$ 上积分得

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{w^\alpha} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(w_1 e^{i\theta_1}, \cdots, w_n e^{i\theta_n}) e^{-i(\theta_1\alpha_1 + \cdots + \theta_n\alpha_n)} d\theta_1 \cdots d\theta_n,$$

故 a_α 由 f 所唯一确定.

现在证明 (4) 成立. 取定 $w \in \Omega$，由于 Ω 是 Reinhardt 域，故可取 ε 充分小，使得

$$G(w, \varepsilon) = \{z \in \mathbf{C}^n: |w_j| - \varepsilon < |z_j| < |w_j| + \varepsilon, j=1, \cdots, n\}$$

含在 Ω 中. 这是因为对于任意的 $z \in G(w, \varepsilon)$，有 $||z_j| - |w_j|| <$

ε，$j=1$，…，n，命 $z'_j=e^{i\theta_j}z_j$，当然有

$$||z'_j|-|w_j||<\varepsilon,\quad j=1,\ \cdots,\ n. \tag{5}$$

适当选择 θ_j，可使 $\arg z'_j=\arg w_j$，于是（5）变成 $|z'_j-w_j|<\varepsilon$，$j=1$，…，n． 因为 Ω 是域，取 ε 充分小，可使 $(z'_1, \cdots, z'_n)\in\Omega$，因为 Ω 是 Reinhardt 域，故 $z\in\Omega$．注意 $G(w,\varepsilon)$ 是 n 个圆环的拓扑积，对 f 的每个变量分别用单复变中的 Laurent 定理，可得

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n}a_\alpha(w)z^\alpha,\quad z\in G(w,\varepsilon),$$

它在 w 的邻域中一致收敛．不难证明，$a_\alpha(w)$ 实际上和 w 无关．为此，取 $w'\in G(w,\varepsilon)$，同样有

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n}a_\alpha(w')z^\alpha,\quad z\in G(w',\varepsilon'),$$

由上面证明的 a_α 的唯一性知道 $a_\alpha(w)=a_\alpha(w')$，$\alpha\in\mathbf{Z}^n$．这就证明了 $a_\alpha(w)$ 在一个局部范围内是一个常数，利用 Ω 的连通性便知 $a_\alpha(w)=a_\alpha$ 在 Ω 上成立．因而

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n}a_\alpha z^\alpha$$

在 Ω 中每一点的邻域中一致地成立，因而在 Ω 中内闭一致地成立． □

从这个定理可得下面很有用的定理．

定理 1.3.3 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的 Reinhardt 域．如果对每个 j（$j=1$，…，n），Ω 中都有第 j 个坐标为 0 的点，那么每个 $f\in H(\Omega)$ 都有幂级数展开式：

$$f(z)=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha, \tag{6}$$

它在 Ω 上内闭一致地成立．

证 根据定理 1.3.2，f 有 Laurent 展开式

$$f(z)=\sum_{\alpha\in \mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha. \tag{7}$$

如果存在这样的 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，其中某个 α_k 是负整数，而对应的 $a_\alpha\neq 0$，在 Ω 中取第 k 个坐标为 0 的点 $z^{(k)}$，则 (7) 对 $z^{(k)}$ 不能成立，这不可能. 因而只有 $a_\alpha=0$. 于是 (7) 就是幂级数 (6).

□

因为单位球 B_n 满足定理 1.3.3 的条件，故有如下的

推论 1.3.4 每个 $f\in H(B_n)$ 都有幂级数展开式

$$f(z)=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha, z\in B_n.$$

上面这个展开式也可写为

$$f(z)=\sum_{k=0}^\infty\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha z^\alpha=\sum_{k=0}^\infty P_k(z),$$

这里 $P_k(z)=\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha z^\alpha$ 是 $z_1, \cdots, z_n$ 的 k 次齐次多项式，称它为 f 在 B_n 中的**齐次展开式**.

从定理 1.3.3 还可得到下面的全纯开拓定理.

定理 1.3.5 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的 Reinhardt 域. 如果对每个 j ($j=1, \cdots, n$)，Ω 中都有第 j 个坐标为 0 的点，那么每个 $f\in H(\Omega)$ 都能全纯开拓到域

$$\Omega'=\{w=(\rho_1 z_1, \cdots, \rho_n z_n) : (z_1, \cdots, z_n)\in\Omega, 0\leqslant\rho_j\leqslant 1, j=1, \cdots, n\}.$$

证 根据定理 1.3.3，f 在 Ω 中有幂级数展开式

$$f(z)=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha, \qquad z\in\Omega.$$

任取 $w\in\Omega'$，按定义，存在 $z\in\Omega$ 及 $0\leqslant\rho_j\leqslant 1$，$j=1, \cdots, n$，使得 $w_j=\rho_j z_j$，$j=1, \cdots, n$，因而 $|w_j|\leqslant|z_j|$. 由于 $\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ 收敛，由命题 1.1.1，$\sum_\alpha a_\alpha w^\alpha$ 收敛，且在 Ω' 中内闭一致收敛. 现在定义

$$F(w) = \sum_{\alpha} a_\alpha w^\alpha, \quad w \in \Omega',$$

则 $F \in H(\Omega')$，且 $F|_\Omega = f$. 所以 F 是 f 在 Ω' 上的全纯开拓.

□

推论 1.3.6 设 $0 < r < R$，

$$\Omega = \{(z_1, \cdots, z_n) : r^2 < |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < R^2\},$$

每个 $f \in H(\Omega)$ 必能全纯开拓到球 $B(0, R)$：

$$|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < R^2.$$

证 利用定理 1.3.5 即得.

推论 1.3.6 又给出了一类发生 Hartogs 现象的域. 由它还可得到一个和单复变中有本质不同的事实：在单复变中，全纯函数的零点一定是孤立的，可在多复变中恰好相反.

定理 1.3.7 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ $(n>1)$ 中的域，$f \in H(\Omega)$，那么 f 在 Ω 上的零点一定不是孤立的.

证 如果 $a \in \Omega$ 是 f 的一个孤立零点，这意味着存在以 a 为中心，充分小的正数 ε 为半径的球 $B(a, \varepsilon) \subset \Omega$，$f$ 在 $B(a, \varepsilon)$ 中除了 a 以外不再有其它的零点. 命

$$g(z) = \frac{1}{f(z)},$$

则 g 在 $B(a, \varepsilon) - \overline{B}\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 中全纯，由推论 1.3.6，g 必在 $B(a, \varepsilon)$ 中全纯，因而 $f(a) \neq 0$，这是一个矛盾. □

1.3.3 全纯域

推论 1.3.6 只是一个更一般的定理的特殊情形，在第四章中，我们将证明下面的结果（见定理 4.6.5）：

设 $n>1$，Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，K 是 Ω 中的紧集. 如果 $\Omega - K$ 是连通的，那么每一个 $\Omega - K$ 上的全纯函数都可全纯开拓到 Ω 上去.

由此看来，$\mathbf{C}^n$ 中有相当一部分域都会发生 Hartogs 现象，那么是不是 $\mathbf{C}^n(n>1)$ 中每个域都有 Hartogs 现象呢？当然不是.

定义 1.3.8 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域. 如果不存在比 Ω 更大的域 Ω' ($\Omega' \supset \Omega, \Omega' \neq \Omega$),使得 $H(\Omega)$ 中每个函数都能全纯开拓到 Ω' 上去, 就称 Ω 是**全纯域**.

$n=1$ 时, $\mathbf{C}$ 中所有的域都是全纯域. $n>1$ 时, 什么样的域是全纯域?

定义 1.3.9 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域. 如果对任意点 $\zeta \in \partial\Omega$, 都存在一个通过 ζ 的实超平面 Q, 使得 Q 与 $\bar{\Omega}$ 仅在 ζ 处相交, 即 $Q \cap \bar{\Omega} = \{\zeta\}$, 就称 Ω 是**欧氏凸域**.

我们有下面的

定理 1.3.10 $\mathbf{C}^n$ 中的欧氏凸域一定是全纯域.

证 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的欧氏凸域,故对 $\partial\Omega$ 上每一点 ζ,存在一个过 ζ 的超平面 Q, 它与 $\bar{\Omega}$ 只在 ζ 处相交. 不妨设 $\zeta=0$, 则过 ζ 的超平面可写为

$$a_1x_1 + b_1y_1 + \cdots + a_nx_n + b_ny_n = 0. \tag{8}$$

记 $c_j = a_j - ib_j$, $z_j = x_j + iy_j$, 则 (8) 可写为 $\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} c_jz_j\right) = 0$. 命 $g(z) = \sum_{j=1}^{n} c_jz_j$,易知 g 在 Ω 中没有零点, 因若有 $w \in \Omega$, 使得 $g(w)=0$,则 $\mathrm{Re}\,g(w)=0$,这等于说 (8) 通过 w 点, 这与 Q 的取法相矛盾. 因而

$$f(z) = \frac{1}{g(z)}$$

是 Ω 中的全纯函数, 但它不可能通过边界点 ζ 全纯开拓出去.

□

显然, 这个定理的逆是不成立的, 即全纯域不一定是欧氏凸域, 这在 $n=1$ 时就有大量的反例. 因此, 全纯域是比欧氏凸域更为广泛的一类域. 如何给出全纯域的特征是多复变理论中一个重要的基本问题, 我们将在第五、六两章中讨论这个问题.

§ 1.4 球和球面上的积分

1.4.1 积分的极坐标公式

设 m_{2n}是 $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{C}^n$ 上的 Lebesgue 测度，已知

$$m_{2n}(B_n)=\frac{\pi^n}{n!}.$$

今在 $\mathbf{C}^n$ 中引进测度 ν_n，使得 $\nu_n(B_n)=1$，它和 m_{2n}的关系为

$$m_{2n}=\frac{\pi^n}{n!}\nu_n. \tag{1}$$

$\mathbf{C}^n$ 中单位球面 ∂B_n 上的 Lebesgue 测度记为 λ_{2n-1}，已知 $\lambda_{2n-1}(\partial B_n)=\dfrac{2\pi^n}{(n-1)!}$. 在$\partial B_n$ 上引进测度 σ_n，使得 $\sigma_n(\partial B_n)=1$，它和 λ_n 的关系为

$$\lambda_{2n-1}=\frac{2\pi^n}{(n-1)!}\sigma_n. \tag{2}$$

在不致引起混乱的情况下，我们将把 ∂B_n、B_n、σ_n、和 ν_n 简记为 ∂B、B、σ 和 ν.

下面的极坐标积分公式在今后的讨论中常要用到.

定理 1.4.1 如果 f 使下式中的积分有意义，那么

$$\int_{\mathbf{C}^n} f d\nu_n = 2n\int_0^\infty r^{2n-1}dr\int_{\partial B} f(r\zeta)d\sigma_n(\zeta). \tag{3}$$

证 记 $z_j=x_j+iy_j$，$j=1$，…，n. 引进极坐标：

$x_1=r\cos\theta_1$，$y_1=r\sin\theta_1\cos\theta_2$，$x_2=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$，…，

$x_n=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-2}\cos\theta_{2n-1}$，

$y_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{2n-2}\sin\theta_{2n-1}$，

其中 $0\leqslant\theta_1$，…，$\theta_{2n-2}<\pi$，$0\leqslant\theta_{2n-1}<2\pi$，则有

$dm_{2n}(z)=r^{2n-1}\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-2}drd\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{2n-1}$，

$d\lambda_{2n-1}(\zeta)=\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-2}d\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{2n-1}$.

其中 $z=r\zeta$，$\zeta\in\partial B_n$，因而得 $dm_{2n}(z)=r^{2n-1}drd\lambda_{2n-1}(\zeta)$. 于是

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}^n}fd\nu_n&=\frac{n!}{\pi^n}\int_{\mathbf{C}^n}fdm_{2n}\\&=\frac{n!}{\pi^n}\int_0^\infty r^{2n-1}dr\int_{\partial B}f(r\zeta)d\lambda_{2n-1}(\zeta)\\&=2n\int_0^\infty r^{2n-1}dr\int_{\partial B}f(r\zeta)d\sigma_n(\zeta).\quad\square\end{aligned}$$

用 ρB_n 记 $\mathbf{C}^n$ 中以原点为中心，ρ 为半径的球. 如果积分区域是 ρB_n，那么用公式（3）可得

$$\int_{\rho B_n}fd\nu_n=2n\int_0^\rho r^{2n-1}dr\int_{\partial B_n}f(r\zeta)d\sigma_n(\zeta).\tag{4}$$

1.4.2 球面上积分的几种表示

设 f 是定义在 $\overline{B}_n$ 上的函数，如果它只依赖于 z_1，…，z_k k 个变数，$1\leqslant k<n$，那么利用定理 1.4.1 可把$\int_{\partial B_n}fd\sigma_n$化为低维球 B_k 上的积分.

定理 1.4.2 设 f 只依赖于 z_1，…，z_k，$1\leqslant k<n$，那么

$$\int_{\partial B_n}fd\sigma_n=\binom{n-1}{k}\int_{B_k}f(w)(1-|w|^2)^{n-k-1}d\nu_k(w).\tag{5}$$

证 记 $I(r)=\int_{rB_n}fd\nu_n,0<r<\infty$,由(4)得

$$I(r)=2n\int_0^r t^{2n-1}dt\int_{\partial B_n}f(t\zeta)d\sigma_n(\zeta).$$

对 r 求导数，并命 $r=1$ 得

$$I'(1)=2n\int_{\partial B_n}f(\zeta)d\sigma_n(\zeta).\tag{6}$$

另一方面，由于 ρB_{n-k}的体积为$\frac{\pi^{n-k}}{(n-k)!}\rho^{2(n-k)}$，所以

$$I(r)=\frac{n!}{\pi^n}\int_{rB_n}fdm_{2n}$$

$$=\frac{n!}{\pi^n}\int_{rB_k} f(w)\,\frac{\pi^{n-k}}{(n-k)!}(r^2-|w|^2)^{n-k}dm_{2k}(w)$$

$$=\binom{n}{k}\int_{rB_k} f(w)(r^2-|w|^2)^{n-k}d\nu_k(w)$$

$$=2k\binom{n}{k}\int_0^r t^{2k-1}dt\int_{\partial B_k} f(t\zeta)(r^2-t^2)^{n-k}d\sigma_k(\zeta).$$

由此得

$$I'(1)=4k(n-k)\binom{n}{k}\int_0^1 t^{2k-1}dt\int_{\partial B_k}(1-t^2)^{n-k-1}f(t\zeta)d\sigma_k(\zeta)$$

$$=2(n-k)\binom{n}{k}\int_{B_k} f(w)(1-|w|^2)^{n-k-1}d\nu_k(w). \qquad (7)$$

比较 (6) 和 (7) 即得 (5). □

在定理 1.4.2 中取 $k=n-1$，可得

推论 1.4.3 如果 f 中不含 z_n，那么

$$\int_{\partial B_n} f d\sigma=\int_{B_{n-1}} f d\nu_{n-1}.$$

定理 1.4.4 下面两个恒等式成立：

(i) $$\int_{\partial B_n} f d\sigma_n=\int_{\partial B_n} d\sigma_n(\zeta)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}\zeta)d\theta;$$

(ii) $$\int_{\partial B_n} f d\sigma_n=\int_{B_{n-1}} d\nu_{n-1}(\zeta')\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta',e^{i\theta}\zeta_n)d\theta,$$

这里 $\zeta'=(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})$.

证 由 Fubini 定理，

$$\int_{\partial B_n} d\sigma_n(\zeta)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}\zeta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_{\partial B_n} f(e^{i\theta}\zeta)d\sigma_n(\zeta),$$

命 $\eta=e^{i\theta}\zeta$，由 σ_n 的旋转不变性得 $d\sigma_n(\eta)=d\sigma_n(\zeta)$.

所以上式右端为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_{\partial B_n} f(\eta)d\sigma_n(\eta)=\int_{\partial B_n} f(\eta)d\sigma_n(\eta).$$

由此即得 (i). 为了证明 (ii), 先用上面的证明方法可得

$$\int_{\partial B_n} f d\sigma_n = \int_{\partial B_n} d\sigma_n(\zeta) \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta', e^{i\theta}\zeta_n) d\theta.$$

当 $(\zeta', \zeta_n) \in \partial B_n$ 时, $|\zeta_n|^2 = 1 - |\zeta'|^2$, 所以上面的内积分实际上只依赖于 ζ', 利用推论 1.4.3 即得 (ii). □

定理 1.4.5 设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 都是多重指标, $\alpha_j \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$, $j = 1, \cdots, n$.

(i) 如果 $\alpha \neq \beta$, 那么 $\int_{\partial B} \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta d\sigma(\zeta) = 0$;

(ii) $\int_{\partial B} |\zeta^\alpha|^2 d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!\alpha!}{(n-1+|\alpha|)!}$.

证 (i) 不妨设 $\alpha_n \neq \beta_n$. 记 $f(\zeta) = \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta$, 利用定理 1.4.4. (ii), 这时内积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta', e^{i\theta}\zeta_n) d\theta = \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha_n - \beta_n)\theta} d\theta = 0,$$

因而(i)成立.

(ii) 命 $I = \int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 e^{-|z|^2} dm_{2n}(z)$. 实际上, 被积函数是 $\prod_{j=1}^{n} |z_j^{\alpha_j}|^2 \cdot e^{-|z_j|^2}$, 把上面的积分按变量分开可得

$$I = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^{2\alpha_j} e^{-|\lambda|^2} dm_2(\lambda) = \pi^n \alpha!. \tag{8}$$

另一方面, 利用定理 1.4.1,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi^n}{n!}\int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 e^{-|z|^2} d\nu_n(z) \\ &= \frac{2\pi^n}{(n-1)!}\int_0^\infty r^{2n-1} dr \int_{\partial B_n} |(r\zeta)^\alpha|^2 e^{-r^2} d\sigma_n(\zeta) \\ &= \frac{2\pi^n}{(n-1)!}\int_0^\infty r^{2|\alpha|+2n-1} e^{-r^2} dr \int_{\partial B_n} |\zeta^\alpha|^2 d\sigma_n(\zeta) \\ &= \frac{\pi^n}{(n-1)!}(n-1+|\alpha|)!\int_{\partial B_n} |\zeta^\alpha|^2 d\sigma_n(\zeta). \end{aligned} \tag{9}$$

比较 (8), (9), 即得 (ii). □

定理 1.4.6 设 α, β 都是多重指标.

(i) 如果 $\alpha \neq \beta$, 那么 $\int_B z^\alpha \bar{z}^\beta d\nu(z) = 0$;

(ii) $\int_B |z^\alpha|^2 d\nu(z) = \dfrac{n!\alpha!}{(n+|\alpha|)!}$.

证 利用极坐标积分公式,把球内的积分化成球面的积分,然后利用定理 1.4.5 即得所要证的公式. □

§1.5 次调和函数和 Hartogs 定理

在这一节里,我们首先介绍次调和函数的概念,然后利用次调和函数的理论来证明 §1.1 中提到的 Hartogs 定理.

1.5.1 单复变数次调和函数

我们先从单复变数的情形说起.

定义 1.5.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的域. 如果 Ω 上的实函数 $u: \Omega \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ ($u \not\equiv -\infty$) 满足:

(i) u 是上半连续的;

(ii) 对任意以 a 为中心, r 为半径的闭圆盘 $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, 有不等式

$$u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta,$$

就称 u 是 Ω 上的**次调和函数**.

所谓 u 在 Ω 中上半连续, 是指对 Ω 中每点 a 有

$$\varlimsup_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} u(z) \leqslant u(a).$$

从定义 1.5.1 马上可以得到,每个调和函数必定是次调和的.

次调和函数有下面一些基本性质.

命题 1.5.2 设 u 是 $\mathbf{C}$ 中的域 Ω 上的次调和函数, φ 是 $\mathbf{R}$ 上递增的凸函数, 那么 $\varphi \circ u$ 也是 Ω 上的次调和函数.

证 因为 u 是次调和函数，故对任意 $\overline{D}(a,r)\subset\Omega$，

$$u(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta.$$

又因为 φ 是递增的凸函数，所以

$$\begin{aligned}\varphi(u(a))&\leqslant\varphi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta\right)\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u(a+re^{i\theta}))d\theta.\end{aligned}$$

从 φ 的递增性和连续性知道，$\varphi\circ u$ 是上半连续的，所以 $\varphi\circ u$ 是次调和的. □

为了给出次调和函数的极值特征，我们引入

定义 1.5.3 设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的域，u 是 Ω 上的实值函数，如果对任意域 $G\subset\subset\Omega$，有

$$u(z)\leqslant\sup_{\zeta\in\partial G}u(\zeta),\quad z\in G,$$

就称极大值原理对 u 成立.

显然极大值原理对 Ω 上任一实值调和函数成立.

命题 1.5.4 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 上任一二次连续可微的实值函数 u，如果满足 $\Delta u\geqslant0$，那么极大值原理成立.

证 先设对 Ω 上每点都有 $\Delta u>0$. 如果极大值原理不成立，那么存在域 $G\subset\subset\Omega$，u 在 G 上的最大值必在 G 的内部某点 z_0 达到. 记 $z_0=x_0+iy_0$，$g(t)=u(x_0,t)$，则 g 在 $t=y_0$ 处有极大值，所以 $\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}(z_0)=g''(y_0)\leqslant0$. 同理 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}(z_0)\leqslant0$，因而 $\Delta u(z_0)\leqslant0$. 这与假定 $\Delta u>0$ 矛盾.

现在设 $\Delta u\geqslant0$，命 $u_\varepsilon(z)=u(z)+\varepsilon|z|^2$，这里 $\varepsilon>0$ 是任意一个正数，于是 $\Delta u_\varepsilon(z)=\Delta u(z)+4\varepsilon>0$. 故极大值原理对 u_ε 成立. 于是

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to0}u_\varepsilon(z)\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\left(\sup_{\zeta\in\partial G}u_\varepsilon(\zeta)\right)=\sup_{\zeta\in\partial G}u(\zeta).$$

即极大值原理对 u 成立. □

现在给出次调和函数的极值特征.

定理 1.5.5 设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的域. Ω 上的连续实值函数 u 是 Ω 上的次调和函数的充分必要条件是，对任意域 $G\subset\subset\Omega$ 及任意在 $\overline{G}$ 上连续、在 G 内调和的实值函数 h，如果 $u(z)\leqslant h(z)$ 在 ∂G 上成立，那么在 G 内也有 $u(z)\leqslant h(z)$.

证 必要性 如果 $u(z_0)>h(z_0)$ 对某个 $z_0\in G$ 成立，命 $u_1=u-h$，则 $u_1(z_0)>0$. 因为 u_1 在 $\overline{G}$ 上连续，故在 $\overline{G}$ 上达到它的最大值 M. 记 $E=\{z\in\overline{G}: u(z)=M\}$. 因为在 G 的边界上 $u_1\leqslant 0$，所以 u_1 的最大值只能在 G 中取到. 因此 E 是 G 中的紧子集. 今设 a 是 E 的一个边界点，于是有 $r>0$，使得 $\overline{D}(a,r)\subset G$，但 $\overline{D}(a, r)$ 的边界上必有某段弧不在 E 中，因而

$$u_1(a) = M > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(a + re^{i\theta})d\theta. \tag{1}$$

另一方面，u 和 h 分别在 G 中次调和和调和，因而有

$$u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta,$$

$$h(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(a + re^{i\theta})d\theta,$$

由此即得

$$u_1(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(a+re^{i\theta})d\theta,$$

这和(1)矛盾.

充分性 任取 $\overline{D}(a,r)\subset\Omega$，那么存在圆盘 $D(a,r)$ 中的调和函数 h，它在圆周上和 u 一致. 于是由假定 $u(z)\leqslant h(z)$ 在圆内成立. 这样，

$$\begin{aligned} u(a) \leqslant h(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(a + re^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

所以 u 是次调和的. □

定理 1.5.5 的一种等价说法是：要使 u 是 Ω 上的次调和函数，其充分必要条件是，极大值原理对 $u-h$ 成立.

实际上，从定理 1.5.5 可以看出，次调和函数是凸函数概念在平面上的推广. 事实上，如果把 $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ 看做一维的 Laplace 方程，那么这个方程的解 $u=ax+b$ 便是一维的调和函数. 而凸函数是在任一区间的两个端点和一线性函数有相同的值，在区间内部，它不超过这个线性函数. 把区间换成平面上的区域，线性函数换成二维调和函数，那么凸函数就是这儿定义的次调和函数.

作为这个定理的一个应用，我们有

定理 1.5.6 设 u 是单位圆盘 U 中的连续次调和函数，命

$$m(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta,\qquad 0<r<1,$$

那么 $m(r)$ 是 r 的非降函数.

证 设 $0<r_1<r_2<1$. 存在圆盘 $D(0,r_2)$ 上的调和函数 h，它在圆周上和 u 一致. 由定理 1.5.3，在 $D(0,r_2)$ 中有 $u\leqslant h$，因而

$$\begin{aligned}m(r_1)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r_1e^{i\theta})d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(r_1e^{i\theta})d\theta=h(0)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(r_2e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r_2e^{i\theta})d\theta=m(r_2).\end{aligned}\quad\square$$

下面给出两个具体的次调和函数.

命题 1.5.7 设 f 是域 Ω 上的全纯函数，$f\not\equiv0$，那么 $\log|f|$ 和 $|f|^p$，$0<p<\infty$，都是 Ω 上的次调和函数.

证 容易知道，$\log|f|$ 是上半连续的. 任取圆盘 $\overline{D}(a,r)\subset\Omega$，我们要证明

$$\log|f(a)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(a+re^{i\theta})|d\theta.\qquad(2)$$

如果 $f(a)=0$，那么 $\log|f(a)|=-\infty$，(2) 显然成立. 今设 $f(a)$

$\neq 0$，f 在 $\overline{D}(a, r)$ 中也没有其它零点，那么通过直接计算知道 $\log|f|$ 是 $\overline{D}(a, r)$ 中的调和函数，因而它是次调和的. 现若 f 在 $D(a,r)$ 中有零点 $z_1, \cdots, z_m$，重零点按重数重复计数，根据 Jensen 公式，

$$\log|f(a)| = -\sum_{k=1}^{m}\log\frac{r}{|a-z_k|} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(a+re^{i\theta})|d\theta$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(a+re^{i\theta})|d\theta.$$

这就是(2). 这就证明了 $\log|f|$ 的次调和性.

因为 $\varphi(t)=e^{pt}$ 是增加的凸函数，而

$$|f|^p=e^{p\log|f|}=\varphi(\log|f|),$$

故由命题 1.5.2，$|f|^p(0<p<\infty)$ 是次调和的.

对于二次连续可微的函数，次调和性有更简单的特征.

定理 1.5.8 设 u 是域 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 上二次连续可微函数，那么 u 是次调和函数的充分必要条件是 $\Delta u\geqslant 0$ 在 Ω 内处处成立.

证 充分性 设 $\Delta u\geqslant 0$ 在 Ω 内处处成立，h 是域 $G\subset\subset\Omega$ 上的调和函数，于是在 G 上有

$$\Delta(u-h)=\Delta u\geqslant 0.$$

由命题 1.5.4，极值原理对 $u-h$ 成立，再由定理 1.5.5 即知 u 是次调和函数.

必要性 如果存在 $a\in\Omega$，使得 $\Delta u(a)<0$，则有 a 的一个邻域 $U(a)$，$\Delta u(z)<0$ 对 $z\in U(a)$ 成立，于是 $-\Delta u(z)>0$ 在 $U(a)$ 成立. 由充分性证明的结果，$-u$ 是 $U(a)$ 上的次调和函数，因而 u 的平均值公式在 $U(a)$ 中的任意小圆盘成立，所以 u 是 $U(a)$ 中的调和函数. 于是 $\Delta u(a)=0$ 这和假定 $\Delta u(a)<0$ 矛盾. 因而 $\Delta u\geqslant 0$ 在 Ω 中处处成立. □

1.5.2 多复变数次调和函数

现在把次调和函数的概念推广到多个复变数的情形.

定义 1.5.9 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，如果 Ω 上的实值函数 $u: \Omega \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ ($u \not\equiv -\infty$) 满足：

(i) u 是上半连续的；

(ii) 对任意以 a 为中心，r 为半径的闭球 $a+r\overline{B} \subset \Omega$，有不等式

$$u(a) \leqslant \int_{\partial B} u(a + r\zeta) d\sigma(\zeta) \tag{3}$$

就称 u 是 Ω 上的**次调和函数**.

如果在 (3) 中以 tr ($0 \leqslant t \leqslant 1$) 换 r，两端乘以 $2nt^{2n-1}$，并对 t 在区间 (0, 1) 中积分，那么由定理 1.4.1，即得

$$u(a) \leqslant \int_{B} u(a + rz) d\nu(z). \tag{4}$$

这样我们得到

命题 1.5.10 如果 u 是域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 上的次调和函数，那么对任意 $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$，(4)成立.

从命题 1.5.7 即可得到下面的

命题 1.5.11 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 上的域，$f \in H(\Omega)$，$f \not\equiv 0$，那么 $\log|f|$ 和 $|f|^p$ ($0 < p < \infty$) 都是 Ω 上的次调和函数.

证 任取 $B(a,r) \subset \Omega$，再取 $R > r$，使得 $B(a,R) \subset \Omega$. 在单位球面上取定 ζ，那么单复变数 λ 的函数 $f(a+\lambda\zeta)$ 在 $|\lambda| < R$ 中全纯，由命题 1.5.7，$\log|f(a+\lambda\zeta)|$ 是 $|\lambda| < R$ 中的次调和函数，因而

$$\log|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(a + re^{i\theta}\zeta)| d\theta,$$

两边对 ζ 在 ∂B 上积分，并利用定理 1.4.4(i)得

$$\log|f(a)| \leqslant \int_{\partial B} d\sigma(\zeta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(a + re^{i\theta}\zeta)| d\theta$$
$$= \int_{\partial B} \log|f(a + r\zeta)| d\sigma(\zeta),$$

所以 $\log|f|$ 是 Ω 上的次调和函数. 由于命题 1.5.2 在 $\mathbf{C}^n$ 中也成

立，可以用证明命题 1.5.7 的方法证明 $|f|^p$ 的次调和性. □

1.5.3 关于次调和函数的 Hartogs 定理

下面的定理 1.5.13 在证明 Hartogs 定理时将起关键的作用，在证明它以前先证明一个简单的事实.

命题 1.5.12 如果 u_1 和 u_2 都是域 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上的次调和函数，那么 $u=\max(u_1,u_2)$ 也是 Ω 上的次调和函数.

证 对任意 $a\in\Omega$，$u(a)$ 等于 $u_1(a)$ 或 $u_2(a)$，所以对于任意的 $\overline{B}(a,r)\subset\Omega$，有

$$u(a)=u_j(a)\leqslant\int_{\partial B}u_j(a+r\zeta)d\sigma(\zeta)\leqslant\int_{\partial B}u(a+r\zeta)d\sigma(\zeta),$$

因而 u 是次调和的. □

现在可以证明

定理 1.5.13 (Hartogs) 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$\{u_k\}$ 是 Ω 上一列次调和函数，α，β 是两个实数. 如果 $\{u_k\}$ 满足：

(i) $u_k(z)\leqslant\beta$，$k=1,2,\cdots$，$z\in\Omega$；

(ii) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}u_k(z)\leqslant\alpha$，$z\in\Omega$，

那么对 Ω 中任意的紧集 K 及 $\varepsilon>0$，存在仅与 K 及 ε 有关的 k_0，使得当 $k>k_0$ 时，

$$u_k(z)<\alpha+\varepsilon$$

对所有 $z\in K$ 成立.

证 如果 $\alpha\geqslant\beta$，结论是显然的. 今设 $\alpha<\beta$，命

$$v_k(z)=\max(\alpha,u_k(z)),\tag{5}$$

则由命题 1.5.12，$v_k(z)$ 是 Ω 上的次调和函数，且 $\alpha\leqslant v_k(z)\leqslant\beta$，而由(ii)知，对每个 $z\in\Omega$ 均有

$$\lim_{k\to\infty}v_k(z)=\alpha.\tag{6}$$

现在要证明，在任意紧集 $K\subset\Omega$ 上，上面的收敛是一致的. 为此，命 $g_k=\sup\{v_k,v_{k+1},\cdots\}$，则 $g_k\geqslant g_{k+1}$，且 $\alpha\leqslant g_k\leqslant\beta$，$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(z)$

$=\alpha$ ($z\in\Omega$)，取定 Ω 中的紧集 K，一定存在 $r>0$，使得对任意 $z\in K$，均有 $B(z,r)\subset\Omega$. 命

$$h_k(z)=\int_B g_k(z+rw)d\nu(w),z\in K,$$

则由控制收敛定理，

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}h_k(z)&=\int_B \lim_{k\to\infty}g_k(z+rw)d\nu(w)\\&=\alpha\int_B d\nu(w)=\alpha.\end{aligned}\tag{7}$$

另外从 $g_k\geqslant g_{k+1}$ 易知 $h_k\geqslant h_{k+1}$. 从 $\alpha\leqslant g_k\leqslant\beta$ 知道 h_k 是 K 上的连续函数，这是因为当 z 和 z' 越靠近时，$B(z, r)$ 和 $B(z', r)$ 这两个球重合的部分也越大，因而 $h_k(z)$ 和 $h_k(z')$ 之差越小. 现在根据 Dini 定理，(7) 中的收敛在 K 上是一致的. 由 v_k 的次调和性，用命题 1.5.10 即得

$$v_k(z)\leqslant\int_B v_k(z+rw)d\nu(w)\leqslant\int_B g_k(z+rw)d\nu(w)=h_k(z),$$

$$z\in K.$$

所以当 $k>k_0$ 时，在 K 上有

$$\alpha\leqslant v_k(z)\leqslant h_k(z)<\alpha+\varepsilon,$$

再由 (5) 即得

$$u_k(z)\leqslant v_k(z)<\alpha+\varepsilon,\ k>k_0,\ z\in K.\quad\square$$

这个定理除了在证明 Hartogs 定理 1.5.14 时要用外，我们还将用它来证明关于由齐次多项式构成的级数的一个重要性质（定理 1.5.19).

1.5.4 关于全纯函数的 Hartogs 定理

现在来证明 §1.1 中提到的 Hartogs 定理.

定理 1.5.14 (Hartogs)　设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$f:\Omega\to\mathbf{C}$ 是定义在 Ω 上的函数. 对于 $a\in\mathbf{C}^n$ 定义 $\mathbf{C}$ 中的域

$$\Omega_{j,a}=\{z\in\mathbf{C}:(a_1,\cdots,a_{j-1},z,a_{j+1},\cdots,a_n)\in\Omega\}$$

及 $\Omega_{j,a}$ 上的函数

$$f_{j,a}(z)=f\ (a_1,\ \cdots,\ a_{j-1},\ z,\ a_{j+1},\ \cdots,\ a_n),$$

如果对任意 $a\in\mathbf{C}^n$ 及 $j=1,\cdots,n$, $f_{j,a}\in H(\Omega_{j,a})$，那么 $f\in H(\Omega)$.

我们通过下面四个引理来完成定理的证明.

引理 1.5.15 设 $\Omega=P=\prod_{j=1}^{n}D(a_j,\ r_j)$ 是一个多圆柱. 如果 $f: P\to\mathbf{C}$ 满足定理 1.5.14 的条件，而且 f 在 $\overline{P}$ 上连续，那么 f 在 P 上全纯.

证 记 $\zeta'=(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_{n-1})$，先证明当 $\zeta'\in\prod_{j=1}^{n-1}\partial D(a_j,r_j)$，$z_n\in D(a_n,r_n)$ 时，有公式

$$f(\zeta',z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{f(\zeta',\zeta_n)}{\zeta_n-z_n}d\zeta_n.$$

事实上，当 $z'=(z_1,\ \cdots,\ z_{n-1})\in\prod_{j=1}^{n-1}D(a_j,\ r_j)$ 时，$f(z',z_n)$ 是 $D(a_n,\ r_n)$ 中的全纯函数，由连续性 $\lim_{z'\to\zeta'}f(z',\ z_n)=f(\zeta',z_n)$ 对 z_n 在 $D(a_n,\ r_n)$ 中内闭一致成立，因而由定理 1.2.6，$f(\zeta',z_n)$ 在 $D(a_n,r_n)$ 中全纯，且在 $\overline{D}(a_n,r_n)$ 上连续，因而由单复变的 Cauchy 积分公式，上式成立. 同样道理，

$$f(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_{n-2},\ z_{n-1},\ z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_{n-1}-a_{n-1}|=r_{n-1}}\frac{f(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_{n-1},\ z_n)}{\zeta_{n-1}-z_{n-1}}d\zeta_{n-1},$$

把上面的 $f(\zeta',z_n)$ 代进来，即得

$$f(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_{n-2},\ z_{n-1},\ z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\cdot\int_{\substack{|\zeta_n-a_n|=r_n\\|\zeta_{n-1}-a_{n-1}|=r_{n-1}}}\frac{f(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_{n-2},\ \zeta_{n-1},\ \zeta_n)}{(\zeta_{n-1}-z_{n-1})(\zeta_n-z_n)}d\zeta_{n-1}d\zeta_n.$$

重复上面的过程，即得

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 P}\frac{f(\zeta)}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n,\quad z\in P.$$

再利用证明定理 1.2.2 的方法，即可得 f 的幂级数展开式：

$$f(z)=\sum_{\alpha}a_\alpha(z-a)^\alpha,$$

这里

$$a_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 P}\frac{f(\zeta)}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-a_j)^{\alpha_j+1}}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

因而 f 在 P 上全纯. □

引理 1.5.16 设 $P=\prod_{j=1}^{n}D(a_j,r_j)$ 是一个多圆柱. 如果 f: $P\to\mathbf{C}$ 满足定理 1.5.14 的条件，而且 f 在 P 中有界，那么 f 在 P 上全纯.

证 根据引理 1.5.15，只要证明 f 在 P 上连续就行了. 为简单起见，不妨设 $a=0$，设 f 在 P 上满足 $|f(z)|\leqslant M$. 任取 z, $w\in P$，可写

$$f(z)-f(w)=\sum_{j=1}^{n}[f(w_1,\cdots,w_{j-1},z_j,\cdots,z_n)\\ -f(w_1,\cdots,w_{j-1},w_j,z_{j+1},\cdots,z_n)],$$

任意固定 j，当 $|\lambda|<r_j$ 时，记

$$\varphi(\lambda)=f(w_1,\cdots,w_{j-1},\lambda,z_{j+1},\cdots,z_n)\\ -f(w_1,\cdots,w_{j-1},w_j,z_{j+1}\cdots,z_n).$$

于是 $|\varphi(\lambda)|\leqslant 2M$，且 $\varphi(w_j)=0$，因而 φ 是把 $D(0,r_j)$ 映入 $D(0,2M)$ 且把 w_j 映为 0 的全纯映射. 设 ψ 是把 $D(0,2M)$ 映为 $D(0,1)$，且把 0 映为 0 的全纯映射，η 是把 $D(0,r_j)$ 映为 $D(0,1)$ 且把 w_j 映为 0 的全纯映射，那么 $\psi\circ\varphi\circ\eta^{-1}$ 是把 $D(0,1)$ 映入 $D(0,1)$ 且把 0 映为 0 的全纯映射，根据 Schwarz 引理，$|(\psi\circ\varphi\circ\eta^{-1})(z)|\leqslant|z|$，或者

$$|\psi(\varphi(\lambda))|\leqslant|\eta(\lambda)|,\quad \lambda\in D(0,r_j).$$

由此即得 $|\varphi(\lambda)|\leqslant 2Mr_j\left|\dfrac{\lambda-w_j}{r_j^2-\overline{w}_j\lambda}\right|$，让 $\lambda=z_j$，得

$$|\varphi(z_j)|\leqslant 2Mr_j\left|\frac{z_j-w_j}{r_j^2-\overline{w}_jz_j}\right|,$$

于是

$$|f(z)-f(w)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\varphi(z_j)|\leqslant 2M\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j|z_j-w_j|}{|r_j^2-\overline{w}_jz_j|},$$

这就证明了 f 的连续性. □

引理 1.5.17 设 $\overline{P}=\prod_{j=1}^{n}\overline{D}(a_j,r_j)$是一个闭多圆柱. 如果当 $z_n\in\overline{D}(a_n,r_n)$ 固定时，$f:\overline{P}\to\mathbf{C}$ 是 $z'\in\prod_{j=1}^{n-1}\overline{D}(a_j,r_j)$ 的连续函数；当 $z'\in\prod_{j=1}^{n-1}\overline{D}(a_j,r_j)$ 固定时，f 是 $z_n\in\overline{D}(a_n,r_n)$ 的连续函数，那么一定存在 $\overline{D}(a_j',r_j')\subset\overline{D}(a_j,r_j)$，$j=1,\cdots,n-1$,使得 f 在

$$\overline{P'}=\prod_{j=1}^{n-1}\overline{D}(a_j',r_j')\times\overline{D}(a_n,r_n)$$

中有界.

证 命

$$E_k=\{z'\in\prod_{j=1}^{n-1}\overline{D}(a_j,r_j):|f(z',z_n)|\leqslant k \text{ 对任意 } z_n\in \overline{D}(a_n,r_n) \text{ 成立}\}.$$

显然

$$\prod_{j=1}^{n-1}\overline{D}(a_j,r_j)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

根据 Baire 定理，必有某个 E_{k_0} 不是疏集，这就是说存在 $\prod_{j=1}^{n-1}\overline{D}(a_j,r_j)$中的开球 B，E_{k_0}在 B 中是稠的. 又因为 f 对 z' 是连续的，所以 E_{k_0}是闭的，因而 $B\subset E_{k_0}$. 这说明 E_{k_0}必有内点. 故存

在多圆柱 $\overline{D}(a_j', r_j') \subset \overline{D}(a_j, r_j)$，$j=1, \cdots, n-1$，使得 $\prod_{j=1}^{n-1}\overline{D}(a_j', r_j') \subset E_{k_0}$. 于是当 $z \in \prod_{j=1}^{n-1}\overline{D}(a_j', r_j') \times \overline{D}(a_n, r_n)$ 时，有 $|f(z)| \leqslant k_0$. □

引理 1.5.18 设 $R>r>0$，f 是多圆柱 $P=\prod_{j=1}^{n}D(a_j, R)$ 上的复函数. 如果它满足：

(i) 对于每个 $z_n \in D(a_n, R)$，函数 $z' \to f(z', z_n)$ 在 $\prod_{j=1}^{n-1}D(a_j, R)$ 上全纯；

(ii) f 在多圆柱 $\prod_{j=1}^{n-1}D(a_j, r) \times D(a_n, R)$ 中全纯且有界；那么 f 在 P 中全纯.

证 为简单起见，不妨设 $a=0$，因为当固定 z_n 时，f 是 z' 的全纯函数，故有幂级数展开式

$$f(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha(z_n) z'^{\alpha}, \qquad (z', z_n) \in P, \tag{8}$$

这里 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ 是 $n-1$ 重指标. 由于

$$a_\alpha(z_n) = \frac{(D^\alpha f)(0, z_n)}{\alpha!},$$

故由(ii)知，a_α 是 $|z_n|<R$ 中的全纯函数. 现取 $0<R_2<R$，因为当 z_n 固定时，(8) 式右端的级数对 z' 是内闭一致收敛的，因而

$$|a_\alpha(z_n) R_2^{|\alpha|}| \to 0, \text{ 当 } |\alpha| \to \infty, \quad |z_n|<R.$$

所以当 $|\alpha|$ 充分大时有

$$\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)| < \log\frac{1}{R_2},$$

或者

$$\varlimsup_{|\alpha|\to\infty}\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)| \leqslant \log\frac{1}{R_2}. \tag{9}$$

再由假定(ii)，f 在 $\prod_{j=1}^{n-1} D(a_j,r)\times D(a_n,R)$ 中有界，设其模不超过 M，则由定理 1.2.3 的 Cauchy 不等式得

$$|a_\alpha(z_n)r^{|\alpha|}|\leqslant M,$$

即

$$\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)|\leqslant \log M+\log\frac{1}{r}. \tag{10}$$

由命题 1.5.7 知道，函数 $z_n\to\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)|$ 是圆盘 $|z_n|<R$ 中的次调和函数族，根据不等式 (9)、(10)，利用定理 1.5.13，对任意 $0<R_1<R_2$，当 $|\alpha|$ 充分大时，在紧集 $|z_n|\leqslant R_1$ 上成立不等式

$$\frac{1}{|\alpha|}\log|a_\alpha(z_n)|\leqslant\log\frac{1}{R_1},$$

即当 $|z_n|\leqslant R_1$ 时有 $|a_\alpha(z_n)R_1^{|\alpha|}|\leqslant 1$. 现在很容易证明级数 (8) 在多圆柱 $\{z:\ |z_j|<R_1,\ j=1,\ \cdots,\ n\}$ 中内闭一致收敛. 事实上，任取 $\rho<R_1$，则当 $|z_j|\leqslant\rho$ 时，$j=1,\ \cdots,\ n$，有

$$\sum_\alpha|a_\alpha(z_n)z'^\alpha|=\sum_\alpha|a_\alpha(z_n)R_1^{|\alpha|}|\left(\frac{|z_1|}{R_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{|z_{n-1}|}{R_1}\right)^{\alpha_{n-1}}$$

$$\leqslant\sum_\alpha\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{\alpha_n}=\left(1-\frac{\rho}{R_1}\right)^{-(n-1)}.$$

由于 R_1 可任意接近 R_2，R_2 可任意接近 R，因此级数 (8) 在 P 中内闭一致收敛，再注意到 $a_\alpha(z_n)z'^\alpha$ 是 P 中的全纯函数，由定理 1.2.5，(8) 收敛到 P 中的全纯函数，即 $f\in H(P)$. □

定理 1.5.14 的证明 对维数用归纳法证明. $n=1$ 时，定理当然成立. 现设对 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 各维数定理已成立. 任取 $a\in\Omega$，适当选取 $R>0$，使得多圆柱 $\prod_{j=1}^{n}\overline{D}\ (a_j,\ 2R)\subset\Omega$，由归纳假定，当 z_n 固定时，$f\ (z',\ z_n)$ 是 z' 的全纯函数，因而是连续函数. 当 z' 固定时，$f\ (z',\ z_n)$ 是 z_n 的全纯函数，因而也是连续的. 于

是由引理 1.5.17，存在多圆柱 $\overline{P'}=\prod_{j=1}^{n-1}\overline{D}(a_j',r_j)\times\overline{D}(a_n,R)$，其中 $\overline{D}(a_j',r_j)\subset\overline{D}(a_j,R)$，$j=1,\cdots,n-1$，使得 f 在 $\overline{P'}$ 上有界. 由引理 1.5.16 知道，f 在 $\overline{P'}$ 上全纯. 现在命

$$Q=\prod_{j=1}^{n-1}D(a_j',R)\times D(a_j,R),$$

则 $Q\subset\Omega$，记 $r=\min\{r_j;\ j=1,\cdots,n-1\}$，则 $r<R$，且 f 在多圆柱

$$\prod_{j=1}^{n-1}D(a_j',r)\times D(a_n,R)$$

上全纯且有界，故由引理 1.5.18，$f\in H(Q)$，因为 $|a_j-a_j'|<R$，$j=1,\cdots,n-1$，所以 $a\in Q$，故 f 在 a 的邻域中全纯. □

1.5.5 由齐次多项式构成的级数

作为次调和函数理论的另一个应用，我们证明由齐次多项式构成的级数的一个性质.

定理 1.5.19 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，F_s 是 s 次齐次多项式，如果对每个固定的 $z\in\Omega$，$\{F_s(z)\}$ 是一有界数列，那么级数 $\sum_{s=0}^{\infty}F_s(z)$ 在 Ω 上内闭一致收敛，因而其和函数在 Ω 上全纯.

我们需要下面两个引理.

引理 1.5.20 设 $P(\lambda)$ 是单复变数 λ 的 k 次多项式，在单位圆周上满足 $|P(\lambda)|\leqslant1$，那么对 $1\leqslant|\lambda|<\infty$，有 $|P(\lambda)|\leqslant|\lambda|^k$.

证 设 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_k\lambda^k$. 由假定 $|P(e^{i\theta})|\leqslant1$ 因而 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(e^{i\theta})|^2d\theta\leqslant1$，由此即得 $\sum_{l=0}^{k}|a_l|^2\leqslant1$，当然 $|a_k|\leqslant1$. 因为 $\frac{P(\lambda)}{\lambda^k}$ 在 $|\lambda|>1$ 中全纯，而且 $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{P(\lambda)}{\lambda^k}=a_k$，而在单位圆周上，它的模最多是 1，因此由最大模原理 $\left|\frac{P(\lambda)}{\lambda^k}\right|\leqslant1\ (1\leqslant|\lambda|<\infty)$. □

引理 1.5.21 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，F_s 是 s 次齐次多项式. 如果

对每个 $z\in\Omega$，$\{F_s(z)\}$ 是一有界数列，那么 $|F_s|^{\frac{1}{s}}$ 在 $\mathbf{C}^n$ 的任一紧集上一致有界.

证 命

$$A_k=\{z\in\overline{\Omega}: |F_s(z)|\leqslant k,\ s=0,1,2,\cdots\}.$$

因为对每个 $z\in\Omega$，$\{F_s(z)\}$ 是有界数列，且因 $F_s(z)$ 是多项式，故 $\overline{\Omega}$ 中每一点必属于某个 A_k，即

$$\overline{\Omega}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

由 Baire 定理，A_k $(k=1,2,\cdots)$ 中至少有一个不是 Ω 中的疏集，不妨设 A_l 不是疏集，因而必在 Ω 的某个球 $B(a,r)$ 中稠密. 于是对任意 $b\in B(a,r)$，必有一列 $z^{(m)}\in A_l$，使得 $\lim\limits_{m\to\infty}z^{(m)}=b$. 由于 $|F_s(z^{(m)})|<l$，$s=0,1,\cdots$，让 $m\to\infty$，即得 $|F_s(b)|\leqslant l$，$s=0,1,\cdots$. 这就证明了 F_s 在 $\overline{B}(a,r)$ 中一致有界. 现设 K 是 $\mathbf{C}^n$ 中任意紧集，则存在充分大的 ρ，使得 $K\subset B(a,\rho)$. 我们证明 $|F_s|^{\frac{1}{s}}$ 在 $r<|w-a|\leqslant\rho$ 中有界. 为此，设 ζ 是单位球面上的一个固定点，命

$$P(\lambda)=\frac{1}{l}F_s(a+\lambda r\zeta),$$

因为 F_s 是 s 次齐次多项式，所以 $P(\lambda)$ 是单复变数 λ 的 s 次多项式. 当 $|\lambda|\leqslant1$ 时，由上面所证 $|P(\lambda)|\leqslant1$. 于是，从引理 1.5.20 得到，当 $|\lambda|>1$ 时，$|F_s(a+\lambda r\zeta)|\leqslant l|\lambda|^s$. 记 $w=a+\lambda r\zeta$，则当 $r<|w-a|\leqslant\rho$ 时，$1<|\lambda|\leqslant\frac{\rho}{r}$，因而

$$|F_s(w)|^{\frac{1}{s}}\leqslant l^{\frac{1}{s}}|\lambda|<\frac{1}{r}l\rho.$$

这就证明了 $|F_s|^{\frac{1}{s}}$ 在 K 中一致有界. □

定理 1.5.19 的证明 命 $u_s=|F_s|^{\frac{1}{s}}$，由命题 1.5.11，u_s 是次调和函数. 由引理 1.5.21，它在 $\mathbf{C}^n$ 的任意紧集上一致有界. 今取 Ω 的紧子集 K，取 ε 充分小，使得 $(1+\varepsilon)^2K\subset\Omega$. 于是，$u_s$ 在

$(1+\varepsilon)^2K$上一致有界. 由于对于给定的$z\in\Omega$, $F_s(z)$是有界数列，所以

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} u_s(z) \leqslant 1, \quad z\in\Omega.$$

于是由定理 1.5.13，对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 s_0，当 $s>s_0$ 时，$u_s(z)<1+\varepsilon$ 在 $(1+\varepsilon)^2K$中成立，即

$$|F_s((1+\varepsilon)^2z)|<(1+\varepsilon)^s, \quad z\in K, \quad s>s_0.$$

因为 F_s 是 s 次齐次多项式，所以

$$|F_s(z)|<\frac{1}{(1+\varepsilon)^s}, \quad z\in K, \quad s>s_0.$$

这就证明了$\sum_{s=0}^{\infty} F_s(z)$ 在 K 上一致收敛. □

§1.6 Riemann 可去奇点定理和 Radó 定理

1.6.1 Riemann 可去奇点定理

在§1.3中，我们提到过全纯开拓的问题. 那里讨论的是某一类域，在其上全部全纯函数都能全纯开拓到更大的域上去. 现在我们要讨论，对于给定的域，在其某个子集上全纯的函数，在什么条件下能全纯开拓到整个域上去.

单复变中全纯函数的孤立奇点分为三类：可去奇点，极点和本性奇点. a 是 f 的可去奇点的充分必要条件是 f 在 a 的邻域（不包括 a）中全纯并且有界. 如果把 a 看成是全纯函数 $g(z)=z-a$ 的零点，那么可去奇点的定理可以叙述为：若 f 在全纯函数 g 的零点的邻域内（不包括零点本身）全纯并且有界，则 f 可全纯开拓到整个邻域（包括零点）. 这种形式的可去奇点定理在多复变中有相应的推广.

定理 1.6.1（Riemann 可去奇点定理） 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，

$g\in H(\Omega)$, $g\not\equiv 0$, $E=\{z\in\Omega;\ g(z)=0\}$. 如果 $f\in H(\Omega-E)$, 且在 $\Omega-E$ 上 f 有界，那么存在唯一的全纯函数 $F\in H(\Omega)$, 使得 $F|_{\Omega-E}=f$.

给出定理的证明之前，先证明一个引理.

引理 1.6.2 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中原点的邻域，$g\in H(G)$, $g(0)=0$, $g\not\equiv 0$. 那么存在非奇异的线性变换 $z=wT$, T 是 n 阶可逆方阵，使得函数 $\tilde{g}(w)=g(wT)$ 具有下面的性质：

(i) $\tilde{g}(0,\cdots,0,w_n)$ 在 $w_n=0$ 处有 k 阶零点，k 是某个自然数；

(ii) 存在以原点为中心的多圆柱 $\Delta=\Delta'\times\Delta_n\subset G$ (这里 Δ' 是 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中以原点为中心的多圆柱，Δ_n 是以原点为中心的圆盘)，使得对每个 $z'\in\Delta'$, $\tilde{g}(z',\lambda)$ 在 Δ_n 中恰有 k 个零点.

证 因为 $g(0)=0$, g 在原点附近的 Taylor 展开为

$$g(z)=\sum_{j=k}^{\infty}P_j(z),\quad k\geqslant 1,\quad P_k(z)\not\equiv 0,$$

这里 $P_j(z)=\sum_{|\alpha|=j}c_\alpha z^\alpha$ 是 j 次齐次多项式. 任选 $b=(b_1,\cdots,b_n)$, 使得 $P_k(b)\neq 0$, 适当选择 t_{ij}, 使下述线性变换是非奇异的，

$$z_i=\sum_{j=1}^{n-1}t_{ij}w_j+b_iw_n,\quad i=1,\cdots,n.$$

于是

$$\tilde{g}(0,\cdots,0,w_n)=g(b_1w_n,\cdots,b_nw_n)=\sum_{j=k}^{\infty}P_j(b_1w_n,\cdots,b_nw_n)$$

$$=\sum_{j=k}^{\infty}w_n^jP_j(b)=w_n^k\varphi(w_n),$$

这里 $\varphi(0)=P_k(b)\neq 0$. 这就证明了 (i).

现在证明 (ii). 因为 $\tilde{g}(0',\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处有 k 阶零点，由于单复变数全纯函数的零点是孤立的，所以存在 $r>0$, 使得 $\tilde{g}(0',\lambda)$ 在圆盘 $\Delta_n=\{\lambda;\ |\lambda|<r\}$ 中除去 $\lambda=0$ 外没有其它零点. 由连续性，存在 $\delta>0$ 和 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中以原点为中心的多圆柱 Δ', 使得当 $z'\in\Delta'$, $|\lambda|=r$ 时，$|\tilde{g}(z',\lambda)|>\delta$, 而且 $\Delta=\Delta'\times\Delta_n\subset\Omega$. 命

$$J(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} (\widetilde{g}(z',\lambda))^{-1}\frac{\partial \widetilde{g}(z',\lambda)}{\partial\lambda}d\lambda, \quad z' \in \Delta'.$$

因为$|\widetilde{g}(z',\lambda)|>\delta$,所以$J$是$\Delta'$中的连续函数.由单复变的知识知道,$J(z')$是$\widetilde{g}(z',\lambda)$在$\Delta_n$中的零点的个数,所以$J(z')$是一个取自然数值的函数,但它又是连续的,故只能是常数.现已知$J(0')=k$,因而$J(z')\equiv k$.这就证明了(ii). □

定理1.6.1的证明 任取$a\in E$,只要证明f可以在a的邻域中全纯开拓就行了.为简单起见,无妨设$a=0$.因为$g(0)=0$,由引理1.6.2(i),经过可逆的线性变换后,存在以原点为中心的多圆柱$\Delta=\Delta'\times\Delta_n$,当$z'\in\Delta'$,$|\lambda|=r$时,$|g(z',\lambda)|>\delta$,因而这样的$(z',\lambda)\in\Omega-E$,所以$f(z',\lambda)$有意义.命

$$F(z',z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{f(z',\lambda)}{\lambda - z_n}d\lambda, \quad |z_n| < r.$$

由于$(z',\lambda)\in\Omega-E$时,$f(z',\lambda)$是z'的全纯函数,所以$F(z',z_n)$是z'的全纯函数.$F(z',z_n)$作为Cauchy积分,当然也是z_n的全纯函数.由Hartogs定理,$F\in H(\Delta'\times\Delta_n)$.由引理1.6.2(ii),当$z'\in\Delta'$固定时,$g(z',\lambda)$在$\Delta_n$中只有有限个零点,这些零点都是$f(z',\lambda)$的可去奇点,所以$f(z',\lambda)$可以全纯开拓到$\Delta_n$中,故由Cauchy积分公式,

$$F(z',z_n) = f(z',z_n).$$

因而F是f在$\Delta'\times\Delta_n$中的全纯开拓. □

1.6.2 Radó 定理

下而的Radó定理则是另一种形式的延拓.

定理1.6.3 设Ω是$\mathbf{C}^n$中的域,f: $\Omega\to\mathbf{C}$是连续的,记$E=\{z\in\Omega: f(z)=0\}$.如果$f\in H(\Omega-E)$,那么$f\in H(\Omega)$.

证 根据Hartogs定理,我们只要证明$n=1$的情形就够了.不妨设$\overline{U}\subset\Omega$,这里$U$是单位圆盘.因为$f\in C(\Omega)$,所以$f$在$\overline{U}$上有界,不妨设$|f(z)|<1$,$z\in\overline{U}$.记$g=P[f]$是$f$的Poisson

积分，即

$$g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it})dt,$$

那么 g 是 U 中的调和函数. 命

$$\varphi = \mathrm{Re}(f-g) + \alpha\log|f|,$$

这里 $\alpha>0$ 是个正常数，那么 φ 在 $U-E$ 中调和.

注意，当 $z\to z_0\in E$ ($z\in U-E$) 时，$\varphi(z)\to-\infty$；当 $z\to e^{i\theta}\in T$ (T 是单位圆周) 时，$\varphi(z)\to\log|f(e^{i\theta})|<0$. 根据调和函数的极值原理，当 $z\in U-E$ 时，$\varphi(z)<0$. 让 $\alpha\to0$，我们得到

$$\mathrm{Re}(f(z)-g(z))\leqslant 0,\ z\in U-E.$$

对 $\alpha<0$ 进行同样的讨论，就可得到

$$\mathrm{Re}(f(z)-g(z))\geqslant 0,\ z\in U-E.$$

同样的讨论对 $f-g$ 的虚部也成立. 因而有

$$f(z)=g(z),\ z\in T\cup\overline{(U-E)}.$$

现设 $z\in\partial E$,则 $f(z)=0$,因而 $g(z)=0$,但 g 是调和函数，所以 $g(z)\equiv0$ ($z\in E$). 这样一来就有

$$f(z)\equiv g(z),\quad z\in\overline{U}.$$

所以 $f\in C^1(U)$，而且 $\frac{\partial f}{\partial\bar z}(z)=0$，$z\in U-E$. 如果 E 有内点的话，它在这些内点上也成立. 由连续性，$\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0$ 在 U 上成立，因而 $f\in H(U)$. □

定理 1.6.1 和定理 1.6.3 在第二章讨论全纯映射的逆映射时都要用到（见定理 2.1.7).

[注记]

本章内容是全书的基础. §1.1 和 §1.2 是单复变的一些主要结果在多复变中的推广. §1.3 中揭示的 Hartogs 现象是 F. Hartogs 于 1906 年发现的，Hartogs 的这个重要发现标志着多复变现论的真正开始. 在这个基础上产生了全纯域、全纯凸域和拟凸域等一系列新概念，以及研究多复变的一系列新方法，长期以来，它们推动着多复变理论的发展. 次调和函数的概念也

是 F. Hartogs 首先引进的，定理 1.5.13 首先由 Hartogs 证明，它是定理 1.5.14 和定理 1.5.18 证明的基础. 由 Hartogs 首先证明的定理 1.5.14 是一个重要的基本定理，即使到现在也没发现一个比较简单的证明.

本章内容可参阅 [Na]，[Hö2]，[Kr] 和 [Ru2].

第二章　全纯映射

在第一章中，我们讨论了多复变数全纯函数的基本性质．我们看到，在某些方面，它与单复变数全纯函数有本质性的差别．从映射的角度来看，单复变数函数把平面点集映成平面点集，而 n 个复变数的函数则是把 $\mathbf{C}^n$ 中的点集映成平面上的点集．因此有必要考虑下面的函数组：

$$F=(f_1,\cdots,f_m),$$

其中每一个分量 f_j 都是 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上的函数．这样，F 就把 Ω 映成 $\mathbf{C}^m$ 中的点集，称它为 $\Omega\to\mathbf{C}^m$ 的映射．本章讨论有关全纯映射的一些性质．

§ 2.1　全纯映射的导数

2.1.1　全纯映射的导数

定义 2.1.1　设 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的域，f_1，…，$f_m\in H(\Omega)$，称 $F=(f_1,\ \cdots,\ f_m)$：$\Omega\to\mathbf{C}^m$ 为**全纯映射**．

在单变数的情形，如果 f 在 z_0 可微，则有

$$f(z_0+h)-f(z_0)=f'(z_0)h+o(h),$$

这里导数 $f'(z_0)$ 可以看成是由 f 和 z_0 确定的一个线性算子 A：$h\to f'(z_0)h$．下面就用这观点来定义全纯映射的导数．

定义 2.1.2　设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，F：$\Omega\to\mathbf{C}^m$ 是一个映射．对于给定的 $z\in\Omega$，如果存在 $A\in L(\mathbf{C}^n,\ \mathbf{C}^m)$，使得

$$F(z+h)-F(z)=Ah+o(|h|),\tag{1}$$

就称 F 在 z 点可微，称 A 为 F 在 z 点的**导数**，并记 $F'(z)=A$．

这里 $h\in\mathbf{C}^n$，$L(\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^m)$ 表示 $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^m$ 的线性映射的全体．(1) 的含义是

$$\lim_{h\to 0}\frac{|F(z+h)-F(z)-Ah|}{|h|}=0,$$

其中分子在 $\mathbf{C}^m$ 中取模，分母在 $\mathbf{C}^n$ 中取模．

现在来看，如果 $F:\Omega\to\mathbf{C}^m$ 是全纯映射，$F'(z)$是否存在？

设 $F=(f_1,\cdots,f_m)$，因为每个 f_j 都是 Ω 中的全纯函数，对于任意 $z\in\Omega$，f_j 可在 z 的邻域中展开为幂级数：

$$f_1(z+h)=f_1(z)+\frac{\partial f_1(z)}{\partial z_1}h_1+\cdots+\frac{\partial f_1(z)}{\partial z_n}h_n+o(|h|),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_m(z+h)=f_m(z)+\frac{\partial f_m(z)}{\partial z_1}h_1+\cdots+\frac{\partial f_m(z)}{\partial z_n}h_n+o(|h|),$$

写成列向量的形式，有

$$F(z+h)=F(z)+Ah+o(|h|),$$

这里 $A=\left(\dfrac{\partial f_i(z)}{\partial z_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$．由此我们得到结论：全纯映射 $F:\Omega\to\mathbf{C}^m$ 在 Ω 中处处可微，其导数

$$F'(z)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1(z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(z)}{\partial z_n}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial f_m(z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(z)}{\partial z_n}\end{pmatrix},$$

这是一个 $m\times n$ 矩阵，它就是 F 的 Jacobi 矩阵．

命题 2.1.3 设 Ω_1，Ω_2 分别是 $\mathbf{C}^k$，$\mathbf{C}^m$ 中的域，

$$F:\Omega_1\to\Omega_2,\quad G:\Omega_2\to\mathbf{C}^n$$

都是全纯映射，那么它们的复合 $H=G\circ F$ 是 $\Omega_1\to\mathbf{C}^n$ 的全纯映射，而且 $H'(z)=G'(w)F'(z)$．

证 设 $F=(f_1,\cdots,f_m)$，$G=(g_1,\cdots,g_n)$，其中 $f_j=$

$f_j(z_1, \cdots, z_k) \in H(\Omega_1)$, $j=1, \cdots, m$; $g_i = g_i(w_1, \cdots, w_m) \in H(\Omega_2)$, $i=1, \cdots, n$. 则 $H=(h_1, \cdots, h_n)$, 其中

$$h_j = g_j(f_1, \cdots, f_m), \quad j = 1, \cdots, n.$$

于是

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_l} = \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial g_j}{\partial w_s} \frac{\partial w_s}{\partial z_l} + \frac{\partial g_j}{\partial \overline{w}_s} \frac{\partial \overline{w}_s}{\partial z_l} \right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}_l} = \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial g_j}{\partial w_s} \frac{\partial w_s}{\partial \overline{z}_l} + \frac{\partial g_j}{\partial \overline{w}_s} \frac{\partial \overline{w}_s}{\partial \overline{z}_l} \right), \tag{3}$$

$j=1, \cdots, n$; $l=1, \cdots, k$.

由 Cauchy-Riemann 方程组

$$\frac{\partial w_s}{\partial \overline{z}_l} = 0, \quad \frac{\partial g_j}{\partial \overline{w}_s} = 0.$$

(2), (3) 分别变成

$$\frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}_l} = 0, \quad j = 1, \cdots, n; \quad l = 1, \cdots, k, \tag{4}$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_l} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial w_s} \frac{\partial w_s}{\partial z_l}. \tag{5}$$

根据 Hartogs 定理（定理 1.5.14), 从 (4) 得 $h_j \in H(\Omega_1)$, $j=1, \cdots, n$, 所以 H 是全纯映射. 从 (5) 得

$$H'(z) = G'(w)F'(z). \qquad \square$$

2.1.2 复 Jacobian 和实 Jacobian 的关系

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域, $F: \Omega \to \mathbf{C}^n$ 是全纯映射, 这时 $F'(z)$ 是一个 n 阶方阵, 称

$$(JF)(z) = \det F'(z)$$

为 F 在 z 点的**复 Jacobian.**

如果记 $z_j = x_j + iy_j$, $f_j = u_j + iv_j$, 那么 $F=(f_1, \cdots, f_n)$ 也可看成 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ 到 $u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n$ 的一个映射, 它的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} & \dfrac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} \\ \dfrac{\partial(v_1,\cdots,v_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} & \dfrac{\partial(v_1,\cdots,v_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} \end{pmatrix}.$$

这样一个由 F 所确定的 $2n\times 2n$ 矩阵的行列式称为 F 的**实 Jacobian**，记为 $(J_RF)(z)$. 为了导出 $(JF)(z)$ 和 $(J_RF)(z)$ 之间的关系，先证明一个简单的代数引理.

引理 2.1.4 设 $A=(a_{jk})$ 是 n 阶复方阵，$a_{jk}=b_{jk}+ic_{jk}$，记 $B=(b_{jk})$，$C=(c_{jk})$，

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix},$$

那么，$\det\widetilde{A}=|\det A|^2$.

证 因为 $A=B+Ci$，所以

$$\begin{aligned}\det\widetilde{A}&=\det\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} B-Ci & -C \\ C+Bi & B \end{pmatrix}\\ &=\det\begin{pmatrix} B-Ci & -C \\ i\,(B-Ci) & B \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} B-Ci & -C \\ O & B+Ci \end{pmatrix}\\ &=\det(B+Ci)\det(B-Ci)=|\det A|^2.\end{aligned}$$ □

命题 2.1.5 设 JF 和 J_RF 分别是全纯映射 F 的复 Jacobian 和实 Jacobian，那么

$$(J_RF)(z)=|(JF)(z)|^2.$$

证 若记

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

为 f 的复 Jacobi 方阵，B 和 C 分别记为

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ & \cdots\cdots & \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad C = -\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ & \cdots\cdots & \\ \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

则因

$$\frac{\partial f_j}{\partial z_k} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - i\frac{\partial u_j}{\partial y_k} = \frac{\partial v_j}{\partial y_k} + i\frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \quad j,k = 1,\cdots,n,$$

故有 $A=B+iC$，而且 f 的实 Jacobi 方阵为

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

于是，从引理 2.1.4 即得本命题. □

§2.2 单叶全纯映射

2.2.1 单叶全纯映射的基本性质

在单复变中，单叶全纯函数有两个基本性质：(i) 若 f 是域 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 中的单叶全纯函数，那么 $f'(z)$ 在 Ω 中处处不等于 0. 但逆命题不成立，即若 $f'(z)$ 在 Ω 中处处不为 0，f 未必是 Ω 中的单叶函数. 但下面的结论成立：(ii) 若存在 $z_0 \in \Omega$ 使得 $f'(z_0) \neq 0$，则 f 在 z_0 的邻域中是单叶的.

下面我们把这两个性质推广到 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯映射.

定理 2.2.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$F: \Omega \to \mathbf{C}^n$ 是全纯映射. 如果存在 $a \in \Omega$，使得 $F'(a)$ 可逆，那么一定存在 a 和 $F(a)$ 的邻域 V 和 W，使得 F 一一地把 V 映成 W，而且 F 的逆映射 $G: W \to V$ 是全纯的，$G'(w) = (F'(z))^{-1}$ 对 $z \in V$ 成立.

证 因为 $F'(a)$ 可逆，所以 $\det F'(a) \neq 0$. 把 F 看成 $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ 上的实映射，由命题 2.1.5，

$$(J_RF)(a)=|(JF)(a)|^2>0.$$

于是，根据实变函数的反函数存在定理，存在 a 和 $F(a)$ 的邻域 V 和 W，使得 F 一一地把 V 映为 W. 由于 $(JF)(a)$ 是 a 的连续函数，故可取充分小的 V，使 $(JF)(z)\neq 0$ 对所有 $z\in V$ 成立，因而 F' 在 V 中每点都是可逆的. 剩下来要证明的是逆映射 $G=(g_1, \cdots, g_n)$ 在 W 上是全纯的. 因对每点 $z\in V$，有 $G(F(z))=z$，即

$$g_j(F(z))=z_j,\quad j=1,\ \cdots,\ n.$$

上式两端对 $\bar{z}_k$ 求导数，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial g_j}{\partial w_s}\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}_k}+\frac{\partial g_j}{\partial \bar{w}_s}\frac{\partial \bar{w}_s}{\partial \bar{z}_k}\right)=0,$$

由于 $\dfrac{\partial w_s}{\partial \bar{z}_k}=\dfrac{\partial f_s}{\partial \bar{z}_k}=0$，上式变为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial \bar{w}_s}\overline{\left(\frac{\partial w_s}{\partial z_k}\right)}=0,\ k=1,\ \cdots,\ n.$$

这是一个以 $\overline{\left(\dfrac{\partial w_s}{\partial z_k}\right)}_{1\leqslant k,s\leqslant n}$ 为系数矩阵的线性方程组，因为

$$\det\overline{\left(\frac{\partial w_s}{\partial z_k}\right)}=\overline{(JF)\ (z)}\neq 0,\ z\in V,$$

所以 $\dfrac{\partial g_j}{\partial \bar{w}_s}=0$，$j$，$s=1$，…，$n$，故由 Hartogs 定理，$g_j$ ($j=1$，…，n) 都在 W 上全纯，因而 G 是 W 上的全纯映射. 根据命题 2.1.3，将 $G(F(z))=z$ 对 z 求导数，即得 $G'(w)F'(z)=I_n$，这里 I_n 是 n 阶单位方阵，因而 $G'(w)=(F'(z))^{-1}$. □

定义 2.2.2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$F:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一个映射，如果对任意 z，$w\in\Omega$，$z\neq w$，有 $F(z)\neq F(w)$，就称 F 是 Ω 上一个**单叶映射**.

对于单叶的全纯映射有下面的

定理 2.2.3 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$F:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是全纯映射. 如果 F 在 Ω 上是单叶的，那么 $\det F'(z)$ 在 Ω 上处处不为 0.

证明的思路 任取 $a\in\Omega$，构造 a 的邻域 U，使得 F 在 $F(U)$ 上有全纯的逆映射 G，即 $G(F(z))=z$ 在 U 上成立，求导数得 $G'(F(z))F'(z)=I_n$，命 $z=a$，并取行列式得

$$\det G'(F(a))\det F'(a)=1,$$

所以 $\det F'(a)\neq 0$，定理就得到了证明.

证 在所设的条件下，我们先证明 $\det F'(z)$ 不可能在 Ω 上恒等于 0，即若命

$$A=\{z\in\Omega: \det F'(z)=0\},$$

我们要证明 $A\neq\Omega$. 用反证法，如果 $A=\Omega$，那么对于任意的 $z\in\Omega$，均有 $\mathrm{rank}F'(z)<n$. 命

$$s=\max\{\mathrm{rank}F'(z): z\in\Omega\},$$

则 $s<n$. 如果 $s=0$，则 $\dfrac{\partial f_j}{\partial z_k}\equiv 0$，$j, k=1, \cdots, n$，这里 f_j 是映射 F 的各个分量，这时 F 是常向量，这和 F 的单叶性相矛盾，因而 $0<s<n$. 于是存在 $p\in\Omega$，使得 $\mathrm{rank}F'(p)=s<n$. 这时方程组

$$w_j=f_j(z_1, \cdots, z_n), \quad j=1, \cdots, n$$

的前 s 个方程在 p 附近可以对变数 $z_1, \cdots, z_s$ 解出：

$$z_j=\varphi_j(z_{s+1}, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_s), \quad j=1, \cdots, s. \tag{1}$$

它们也满足后面 $n-s$ 个方程：

$$w_j=f_j(\varphi_1, \cdots, \varphi_s, z_{s+1}, \cdots, z_n), \quad j=s+1, \cdots, n.$$

如果记 $F(p)=q$，把 q 而定，在 p 的附近随意取 $z_{s+1}, \cdots, z_n$ 的值，由 (1) 再定出 $z_1, \cdots, z_s$ 的值，这样得到的 z 在映射 F 下的像都是 q，这就和 F 的单叶性相矛盾了. 因而 $A\neq\Omega$.

现任取 $a\in\Omega$，P 是以 a 为中心的一个小多圆柱，使得 $\overline{P}\subset\Omega$，则 ∂P 是紧的，因而 $K=F(\partial P)$ 也是紧的. 由于 $a\notin\partial P$，F 是单叶的，所以 $F(a)\notin K$. 取以 $F(a)$ 为中心的小多圆柱 V，使得 $\overline{V}\cap K=\varnothing$，命 $U=F^{-1}(V)\cap P$，那么 U 是 a 的一个邻域，我们来证明 F 在 $F(U)$ 上有全纯的逆映射.

因为 $\det F'(z)$ 是 Ω 上的全纯函数，从 $A\neq\Omega$ 便知 $U-A$ 不是空集，因若 $U=A$，这就是说 $\det F'(z)$ 在 U 上处处为 0，由唯一性定理，$\det F'(z)$ 在 Ω 上处处为 0，这与 $A\neq\Omega$ 相矛盾. 于是对于任意 $z\in U-A$，$\det F'(z)\neq 0$. 由刚才证明的定理 2.2.1，$D=F(U-A)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集，而且存在 $g: D\to U-A$，g 在 D 上是全纯的，使得

$$F(g(w))=w,\quad w\in D. \tag{2}$$

根据 U 的定义，$F(U)\subset V$，所以 $D=F(U-A)\subset V$，下面将证明 g 可以全纯开拓到 V 上去. 首先从 (2) 可得

$$\det F'(g(w))\det g'(w)=1,\quad w\in D. \tag{3}$$

其次注意 $F:U\to V$ 是逆紧的，即对 V 中的任意紧集 C，$F^{-1}(C)$ 是 U 中的紧集. 这是因为 $F(\partial P)$ 和 V 不相交，由 F 的连续性，存在 ∂P 的邻域 N，使得 $F(N)$ 和 V 不相交，所以不可能存在 $b\in\partial P$，使得 $F(b)\in C\subset V$，因而 $F^{-1}(C)$ 在 P 中是相对紧的，于是 $F^{-1}(C)\cap U$ 是紧的.

现设 $\eta\in(\partial D)\cap V$，$w^{(k)}$ 是 D 中一列点，当 $k\to\infty$ 时，$w^{(k)}\to\eta$. 因为 $F:U\to V$ 是逆紧的，所以 $g(w^{(k)})=F^{-1}(w^{(k)})$ 在 U 的一个紧子集内，因而它的每个极限点都在 U 中. 另一方面 $w^{(k)}\to\eta\in\partial D$，所以 $g(w^{(k)})$ 趋于 A 中的点. 总之，$g(w^{(k)})$ 的极限点都在 $A\cap U$ 上. 于是当 $k\to\infty$ 时，$\det F'(g(w^{(k)}))\to 0$，由 (3) 得

$$\det g'(w^{(k)})\to\infty,\quad k\to\infty. \tag{4}$$

现在定义

$$h(w)=\begin{cases}(\det g'(w))^{-1}, & w\in D,\\ 0, & w\in V-D.\end{cases} \tag{5}$$

由 (4) 知 h 在 V 上连续，于是由 Radó 定理（定理 1.6.3），h 在 V 上全纯，且由 (5) 知道，

$$V-D=\{w\in V: h(w)=0\}.$$

若记 $g=(g_1,\cdots,g_n)$，则因 $g(D)=U-A$，而 $U\subset P$，所以每

个 g_j ($j=1, \cdots, n$) 都在 D 上有界. 于是由 Riemann 可去奇点定理(定理 1.6.1), 每个 g_j 都能全纯开拓到 V 上. 因而存在唯一的全纯映射 $G: V\to\overline{U}\subset\Omega$, 使得 $G|_D=g$. 由于 $F\circ G$ 在 D 上是恒等变换, 所以在 V 上也是恒等变换, 即 G 是 F 在 $F(U)$ 上的全纯逆映射. □

定义 2.2.4 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域, $F: \Omega\to\mathbf{C}^n$ 是全纯映射. 如果 F 有全纯的逆映射 F^{-1}, 就称 F 是**双全纯映射**.

从定理 2.2.3 和定理 2.2.1 立刻可得

推论 2.2.5 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域, $F: \Omega\to\mathbf{C}^n$ 是单叶的全纯映射, 那么 F 是 Ω 到 $F(\Omega)$ 之上的双全纯映射.

2.2.2 全纯映射列的基本性质

现在讨论全纯映射列的性质.

定理 2.2.6 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域, $F_k: \Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 Ω 上满足下面两个条件的全纯映射列:

(i) F_k 在域 Ω 上内闭一致收敛于全纯映射 F;

(ii) 存在 $a\in\Omega$, 使得 $\det F'(a)\neq 0$.

那么 (a) 存在 a 的邻域 U 以及充分大的整数 k_0, 当 $k\geq k_0$ 时, F_k 在 U 中是双全纯的.

(b) 存在 $F(a)$ 的邻域 V, 使得当 $k\geq k_0$ 时有

$$V\subset F_k(U).$$

证 (a) 因为 $\det F'(a)\neq 0$, 由定理 2.2.1, 存在以 a 为中心, r 为半径的球 $B(a, r)$, F 在 $\overline{B}(a, r)$ 中是双全纯的. 现在要证存在 $\rho<r$ 及 k_0, 当 $k\geq k_0$ 时, F_k 在 $\overline{B}(a, \rho)$ 中是单叶的. 不然的话, 必有一列自然数 $k_1<k_2<\cdots\to\infty$ 及两个收敛于 a 的点列 $b^{(k)}$ 和 $c^{(k)}$, 使得 $F_{k_m}(b^{(m)})=F_{k_m}(c^{(m)})$. 显然, 当 $m\to\infty$ 时, $r_m=|b^{(m)}-c^{(m)}|\to 0$. 现在要导出 $\det F'(a)=0$ 的矛盾. 记 $d^{(m)}=\frac{1}{r_m}(c^{(m)}-b^{(m)})$, 则 $|d^{(m)}|=1$. 不妨设 $\lim\limits_{m\to\infty} d^{(m)}=d$, 否则可取子列收

敛于它．记

$$\Phi_m(t)=F_{k_m}(b^{(m)}+td^{(m)})-F_{k_m}(b^{(m)}).$$

如果记 $\Phi(t)=\lim\limits_{m\to\infty}\Phi_m(t)$，那么 $\Phi(t)=F(a+td)-F(a)$．由于 $\Phi_m(r_m)=F_{k_m}(c^{(m)})-F_{k_m}(b^{(m)})=0$，$\Phi_m(0)=0$，因而可得 $\Phi'(0)=0$．设 $F=(f_1,\cdots,f_n)$，$\Phi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$，那么

$$\varphi_j'(0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(a)\,d_k=0,\qquad j=1,\cdots,n.$$

因为 $|d_1|^2+\cdots+|d_n|^2=|d|^2=1$，这说明上面的齐次方程组有非零解 $(d_1,\cdots,d_n)$，所以 $\det F'(a)=0$，这和条件 (ii) 矛盾．

(b) 上面已经证明，存在以 a 为中心，ρ 为半径的球 $B(a,\rho)$，使得当 $k\geqslant k_0$ 时，F 和 F_k 在 $B(a,\rho)$ 中是双全纯的，因面 $F(a)$ 是 $F(B)$ 的内点．于是存在 $\delta>0$，使得对任意 $\zeta\in\partial B$，$|F(\zeta)-F(a)|>\delta$．因为 F_k 在 ∂B 上一致收敛，所以当 $k\geqslant k_0$ 时，对任意 $\zeta\in\partial B$，$|F_k(\zeta)-F(\zeta)|<\frac{\delta}{2}$．于是对任意 $\zeta\in\partial B$，当 $k\geqslant k_0$ 时有

$$\begin{aligned}|F_k(\zeta)-F(a)|&\geqslant|F(\zeta)-F(a)|\\&\quad-|F_k(\zeta)-F(\zeta)|>\frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

现在命 $V=B\left(F(a),\frac{\delta}{2}\right)$，则 $V\subset F_k(B)$．　□

从定理 2.2.6 马上可得下面的

推论 2.2.7　设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$F_k:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是一列全纯映射．如果它在 Ω 上内闭一致收敛于 F，而 F 是 Ω 上的单叶全纯映射，那么对任意紧集 $K\subset\Omega$，存在整数 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时，F_k 在 K 上是单叶的．

证　如果定理不成立，那么存在自然数列 $k_1<k_2<\cdots\to\infty$ 及 K 中两点到 $a^{(m)}$，$b^{(m)}$，使得

$$F_{k_m}(a^{(m)})=F_{k_m}(b^{(m)}),\quad m=1,2,\cdots,$$

由于 K 是紧的，不妨设 $a^{(m)}\to a$，$b^{(m)}\to b$，由上式即得 $F(a)=F(b)$，因为 F 是单叶的，所以 $a=b$，即 $a^{(m)}\to a$，$b^{(m)}\to a$. 这等于说，F_{k_m} 在 a 的邻域中不是单叶的，这和定理 2.2.6 矛盾.

□

定理 2.2.6 和推论 2.2.7 都是从极限映射的单叶性来推断映射序列的单叶性，下面的定理则是从映射序列的单叶性来推断极限映射的单叶性，它也可以看成是 Hurwitz 定理（定理 1.2.9）在全纯映射方面的推广.

定理 2.2.8 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$F_k: \Omega\to\mathbf{C}^n$ 是 Ω 上一列内闭一致收敛于 F 的全纯映射. 如果每个 F_k 都是单叶的，那么 F 或者是 Ω 上的退化映射（即 $\det F'(z)\equiv 0$，$z\in\Omega$），或者也是 Ω 上的单叶映射.

证 由定理 2.2.3，$\det F'_k(z)$ 在 Ω 上处处不为 0，由于 $\det F'_k(z)$是 Ω 上的全纯函数，且

$$\lim_{k\to\infty}\det F'_k(z)=\det F'(z)$$

在 Ω 上内闭一致地成立，故由定理 1.2.9，$\det F'(z)$在 Ω 上或者恒等于 0，或者处处不为 0. 我们要证明，如果 $\det F'(z)$在 Ω 上处处不为 0，那么 F 在 Ω 上是单叶的. 任取 $a, b\in\Omega$，$a\neq b$，要证$F(a)\neq F(b)$. 为简单起见，不妨设 $a=0$，$F(a)=0$. 于是要证，如果$|b|>0$，那么$|F(b)|>0$. 由于 $\det F'(0)\neq 0$,故存在 $B(0,\rho)$，使得 F 在 $\overline{B}(0,\rho)$ 上是单叶的. 因此如果 $b\in B(0,\rho)$，当然有 $|F(b)|>0$. 现设 $b\notin B(0,\rho)$，由于$\det F'(0)\neq 0$，由定理 2.2.6，存在 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时，F_k 在 $B(0,\rho)$ 中是单叶的，且存在以 $F(0)=0$为中心的邻域 V，使得当 $k\geqslant k_0$ 时有 $V\subset F_k(B(0,\rho))$，设 $V=B(0,\sigma)$，因为 $b\notin B(0,\rho)$，所以 $F_k(b)\notin B(0,\sigma)$，即 $|F_k(b)|\geqslant\sigma$，让 $k\to\infty$，即得 $|F(b)|\geqslant\sigma>0$. □

§2.3 H. Cartan 定理和球的全纯自同构

2.3.1 H. Cartan 定理

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，如果 F 是把 Ω 映为自己的双全纯映射，就称 F 是 Ω 的**全纯自同构**，或简称**自同构**. Ω 的自同构的全体记为 $\mathrm{Aut}(\Omega)$. 显然 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 在映射的复合运算下构成一个群，称为 Ω 的**自同构群**.

在单复变中已经知道，单位圆盘 U 的自同构群是由下述变换组成的：

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ a\in U,\ \theta\in\mathbf{R}.$$

一般来说，确定一个域的自同构群是相当困难的. 在这一节中，我们将要给出两个比较简单的域多圆柱和球的自同构群，并讨论与它们有关的一些性质.

我们先从两个一般性定理讲起，它们都是属于 H. Cartan 的.

定理 2.3.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，如果 $F:\Omega\to\Omega$ 是全纯的，且对于某点 $a\in\Omega$ 有 $F(a)=a$ 和 $F'(a)=I_n$，那么 $F(z)=z$ 对所有 $z\in\Omega$ 成立.

证 为简单起见，不妨设 $a=0$，因为 Ω 是有界域，故必存在 $0<r<R<\infty$，使得 $rB\subset\Omega\subset RB$，这里 rB 和 RB 分别记中心在原点，半径为 r 和 R 的球. 设 $F=(f_1,\cdots,f_n)$，由假设得

$$f_j(0)=0,\ \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)=\delta_{ij},\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

根据推论 1.3.4，f_j 可在 rB 中展开为

$$f_j(z)=z_j+P_2^{(j)}(z)+\cdots,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

这里 $P_2^{(j)}$，$P_3^{(j)}$，…分别是 z 的 2 次，3 次…齐次多项式，因而可写

$$F(z)=z+\sum_{s=2}^{\infty} F_s(z), \tag{1}$$

这里 $F_s(z) = (P_s^{(1)}(z), \cdots, P_s^{(n)}(z))$，我们要证明

$$F_s(z) \equiv 0, \quad s=2, 3, \cdots$$

设第一个不为 0 的是 F_m，$m\geqslant 2$，则（1）可写为

$$F(z) = z+\sum_{s=m}^{\infty} F_s(z). \tag{2}$$

注意到 $P_m^{(j)}(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$，所以

$$\begin{aligned} P_m^{(j)}(F(z)) &= P_m^{(j)}(f_1, \cdots, f_n) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha f_1^{\alpha_1}\cdots f_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (z_1+\cdots)^{\alpha_1}\cdots(z_n+\cdots)^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha+\cdots = P_m^{(j)}(z)+\cdots \end{aligned}$$

因而

$$F_m(F(z)) = F_m(z)+\cdots$$

记 $F^2=F\circ F$，$F^k=F\circ F^{k-1}$，那么

$$\begin{aligned} F^2(z) &= F(F(z)) = F(z)+F_m(F(z))+\cdots \\ &= z+2F_m(z)+\cdots \end{aligned}$$

一般可得

$$F^k(z)=z+kF_m(z)+\cdots \quad k=1,2,\cdots \quad z\in rB.$$

因为 $F_m(z)$ 的每个分量都是 m 次齐次多项式，所以

$$F^k(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}z+ke^{im\theta}F_m(z)+\cdots$$

于是

$$kF_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F^k(e^{i\theta}z)e^{-im\theta}d\theta, \tag{3}$$

这里积分是对 F^k 的每个分量进行的. 因为 F 把 Ω 映入 Ω，所以 F^k 也把 Ω 映入 Ω，因而

$$|F^k(e^{i\theta}z)|<R$$

对所有 $z\in rB$ 及 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 成立，由（3）即得

$$k|F_m(z)|<R,\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

对每个 $z\in rB$ 成立，因而 $F_m(z)=0$，再由定理 1.1.3 即得 $F(z)=z$ 在 Ω 上成立. □

定义 2.3.2 设 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的域. 如果对任意 $z\in\Omega$ 及实数 θ，均有 $e^{i\theta}z\in\Omega$，就称 Ω 为**圆型域**.

显然，球和多圆柱都是圆型域，Reinhardt 域也一定是圆型域，但圆型域不一定是 Reinhardt 域. 例如 $\Omega=\{(z_1,\ \cdots,\ z_n):\ |z_1+\cdots+z_n|<1\}$ 显然是圆型域，但却不是 Reinhardt 域.

对于圆型域上的双全纯映射，有下面的 H. Cartan 定理.

定理 2.3.3 设 Ω_1 和 Ω_2 都是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的圆型域，其中 Ω_1 是有界的. 如果 $F:\ \Omega_1\to\Omega_2$ 是双全纯映射，且 $F(0)=0$，那么 F 一定是线性映射.

证 命 $G=F^{-1}$，因为 $G(F(z))=z$，由命题 2.1.3 得 $G'(0)F'(0)=I_n$，对于固定的实数 θ，定义

$$H(z)=G(e^{-i\theta}F(e^{i\theta}z)),\quad z\in\Omega_1.$$

因为 Ω_1 和 Ω_2 都是圆型域，所以 H 是 $\Omega_1\to\Omega_1$ 的全纯映射，而且 $H(0)=0$，$H'(0)=G'(0)F'(0)=I_n$，且因 Ω_1 是有界的，由定理 2.2.1，$H(z)=z$ 对 $z\in\Omega_1$ 成立. 由此可得

$$F(z)=F(H(z))=F(G(e^{-i\theta}F(e^{i\theta}z)))=e^{-i\theta}F(e^{i\theta}z),$$

即

$$F(e^{i\theta}z)=e^{i\theta}F(z) \tag{4}$$

对任意 $z\in\Omega_1$ 及实数 θ 成立. 在原点附近作 $F(z)$ 的齐次展开式

$$F(z)=F'(0)z+F_m(z)+\cdots,\qquad m\geqslant 2, \tag{5}$$

这里 $F(z)$，z，$F_m(z)$，…都写成列向量，$F_m(z)$ 的每个分量都是 m 次齐次多项式. 在（5）中用 $e^{i\theta}z$ 代 z，并注意到（4），即得

$$F(z)=F'(0)z+e^{i(m-1)\theta}F_m(z)+\cdots \tag{6}$$

比较（5）与（6），即得 $F_m(z)=0$，因而 $F(z)=F'(0)z$. □

从定理 2.3.3 可得如下的

推论 2.3.4 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界圆型域，如果 $F\in \mathrm{Aut}(\Omega)$，且 $F(0)=0$，那么 F 一定是线性映射.

证 只要在定理 2.3.3 中取 $\Omega_1=\Omega_2=\Omega$. □

注意，定理 2.3.3 中关于 Ω_1 是有界域的假定是必要的. 如果 Ω_1 不是有界域，结论就可能不成立. 例如

$$\Omega=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2:\ |z_1z_2|<1\},$$

显然 Ω 不是有界域. 任取 $h: U\to\mathbf{C}$，这里 U 记单位圆盘，要求 h 是 U 中处处不为 0 的全纯函数. 考虑映射

$$F_h(z_1,z_2)=(z_1h(z_1z_2),z_2h^{-1}(z_1z_2)).$$

由于 $|z_1h(z_1z_2)z_2h^{-1}(z_1z_2)|=|z_1z_2|<1$，所以 $F_h(\Omega)\subset\Omega$，又因为 $(F_h\circ F_{\frac{1}{h}})(z_1,z_2)=(z_1,z_2)$，所以 $(F_h)^{-1}=F_{\frac{1}{h}}$，因而 F_h 是把 Ω 映为 Ω 的双全纯映射，而且 $F_h(0,0)=0$，因而定理 2.3.3 的条件都满足，但 F_h 不是线性映射，原因就是 Ω 不是有界域. 实际上，这也是推论 2.3.4 的一个反例. 如果假定 $h(0)=1$，那么

$$F_h'(0)=\begin{pmatrix}h(0) & 0\\ 0 & h^{-1}(0)\end{pmatrix}=I_2.$$

这也给出了定理 2.3.1 的反例.

定义 2.3.5 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域. 如果对任意两点 $a,b\in\Omega$，一定存在 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega)$，使得 $\varphi(a)=b$，就称 Ω 为**可递域或齐性域**.

可递域有很多良好的性质.

定理 2.3.6 设 Ω_1 和 Ω_2 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的圆型域，其中 Ω_1 是有界**可递域**. 如果存在双全纯映射 F 把 Ω_1 映为 Ω_2，那么一定存在线性映射把 Ω_1 映为 Ω_2.

证 设 $a=F^{-1}(0)$. 因为 Ω_1 是可递的，必存在 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega_1)$，使得 $\varphi(0)=a$. 命 $G=F\circ\varphi$，于是

$$G(\Omega_1)=F(\varphi(\Omega_1))=F(\Omega_1)=\Omega_2,$$

而且 $G(0)=F(\varphi(0))=F(a)=0$，应用定理 2.3.3，即知 G 是线

性映射. □

2.3.2 多圆柱和球的自同构

现在应用 H. Cartan 定理分别给出单位多圆柱 U^n 和单位球 B_n 的自同构群.

定理 2.3.7 对于每个 $f\in \mathrm{Aut}(U^n)$，一定存在 $a\in U^n$，实数 θ_1，…，θ_n 和置换 τ：(1，…，n) → (1，…，n)，使得

$$f(z)=\left(e^{i\theta_1}\frac{z_{\tau(1)}-a_1}{1-\bar{a}_1z_{\tau(1)}},\cdots,e^{i\theta_n}\frac{z_{\tau(n)}-a_n}{1-\bar{a}_nz_{\tau(n)}}\right).$$

证 分两种情况讨论：

（一）先设 $f(0)=0$，这时我们证明

$$f(z)=\left(e^{i\theta_1}z_{\tau(1)},\cdots,e^{i\theta_n}z_{\tau(n)}\right).$$

事实上，在这种情况下，根据推论 2.3.4，f 是一个线性映射. 今设 $f=(f_1,\cdots,f_n)$. 则

$$f_k(z)=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}z_j,\quad k=1,\cdots,n,\quad a_{kj}\in\mathbf{C}. \tag{7}$$

因为当 $z\in U^n$ 时，$|f_k(z)|<1$，$k=1,\cdots,n$. 若设 $a_{kj}=|a_{kj}|e^{-i\varphi_j}$，选取 $z_j=re^{i\varphi_j}$，$0<r<1$. 则有 $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}|<\frac{1}{r}$，让 $r\to1$，得

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\leqslant1,\quad k=1,\cdots,n. \tag{8}$$

下面我们证明，对 $j=1,\cdots,n$ 有

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{kj}|=1. \tag{9}$$

事实上，固定 j，取点列 $z^{(l)}=\left(0,\cdots,1-\frac{1}{l},\cdots,0\right)$，$z^{(l)}$ 中除了第 j 个坐标为 $1-\frac{1}{l}$ 外，其它坐标均为 0，显然 $z^{(l)}\in U^n$，它以 $(0,\cdots,1,\cdots,0)$ 为极限点，所以 $f(z^{(l)})$ 的极限点也在 U^n 的边界上. 由 (7) 知 $f_k(z^{(l)})=\left(1-\frac{1}{l}\right)a_{kj}$，因而

$$f(z^{(l)})=\left(1-\frac{1}{l}\right)(a_{1j},\cdots,a_{nj})\to(a_{1j},\cdots,a_{nj})\in\partial U^n,$$

这就证明了 (9). 今取 $j=1$，则有相应的 $k(1)$，使得 $|a_{k(1),1}|=1$，由 (8) 得 $a_{k(1),j}=0$，$j=2$，$\cdots$，n. 对 $j=2$，有相应的 $k(2)$，使得 $|a_{k(2),2}|=1$，而且 $k(2)\neq k(1)$，不然的话，便有 $|a_{k(1),2}|=1$，这和刚才证明的 $a_{k(1),2}=0$ 相矛盾. 继续做下去，对每个 $j=1,\cdots,n$，必有 $k(j)$，使得 $|a_{k(j),j}|=1$，$a_{k(j),i}=0$ $(i\neq j)$，而且 $(k(1),\cdots,k(n))$ 是 $(1,\cdots,n)$ 的一个置换. 若记 τ 是上述置换的逆置换，则

$$|a_{k,\tau(k)}|=1,\quad a_{j,\tau(k)}=0(j\neq k)$$

代入 (7)，即得 $f_k(z)=e^{i\theta_k}z_{\tau(k)}$.

(二) 现设 $f(a)=0$，$a\neq 0$. 作全纯映射

$$g(z)=\left(\frac{z_1-a_1}{1-\bar{a}_1z_1},\cdots,\frac{z_n-a_n}{1-\bar{a}_nz_n}\right),$$

显然 $g\in \mathrm{Aut}(U^n)$，且 $g(a)=0$. 命

$$F=g\circ f^{-1},\tag{10}$$

当然 $F\in\mathrm{Aut}(U^n)$，而且 $F(0)=g(a)=0$，根据刚才讨论过的(一)，$F(z)=(e^{i\theta_1}z_{\tau(1)},\cdots,e^{i\theta_n}z_{\tau(n)})$，由(10)得 $f(z)=F^{-1}(g(z))$，把 F^{-1}和 g 的表达式代入，即得所要证的结果. □

现在讨论单位球 B_n 的全纯自同构.

定理 2.3.8 设 $\varphi\in\mathrm{Aut}(B_n)$. 如果 $\varphi(0)=0$，那么 φ 是一酉变换，即存在酉方阵 U，使得

$$\varphi(z)=zU,\quad z\in B_n.$$

证 首先由推论 2.3.4，φ 是一线性映射. 写 $\varphi(z)=zT$，这里 T 是一个 n 阶可逆方阵. 对于任意 $z\in B_n$，如果 $|z|<|zT|$，那么 $\frac{z}{|zT|}\in B_n$，因而 $\left(\frac{z}{|zT|}\right)T\in B_n$. 但 $\left|\left(\frac{z}{|zT|}\right)T\right|=1$，这不可能. 同理可证 $|z|>|zT|$ 也不可能. 所以对任意 $z\in B_n$ 有 $|z|=|zT|$，因而 T 是酉方阵. □

这个定理确定了全部把原点映为原点的 B_n 的自同构.

为了确定 B_n 的全部自同构，对于 $a\in B_n$，设法构造 $\varphi_a\in \mathrm{Aut}(B_n)$，使得 $\varphi_a(a)=0$. 仿照单位圆盘的情形，写

$$w=\varphi_a(z)=\frac{a-zA}{1-\bar{a}z'}, \tag{11}$$

这里 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，$w=(w_1,\cdots,w_n)$，$a=(a_1,\cdots,a_n)$ 都是行向量，z' 表示 z 的转置，是一个列向量，因而 (11) 的分母是一个复数. (11) 的分子上的 A 是一个待定的 n 阶方阵，分子表示一个行向量. 现在的问题是要适当选取 A，使得 (11) 是我们需要的自同构. 直接计算可得

$$1-w\bar{w}'=\frac{1}{|1-\bar{a}z'|^2}(1-\bar{a}z'-\bar{z}a'+\bar{a}z'\bar{z}a'-a\bar{a}'$$
$$+zA\bar{a}'+a\overline{A}'\bar{z}'-zA\overline{A}'\bar{z}').$$

为了化简上式，我们要求 $A\bar{a}'=\bar{a}'$，或者 $a=a\overline{A}'$. 于是得

$$1-|w|^2=\frac{1}{|1-\bar{a}z'|^2}(s^2+\bar{a}z'\bar{z}a'-zA\overline{A}'\bar{z}'),$$

其中 $s^2=1-a\bar{a}'=1-|a|^2$. 注意到

$$\bar{a}z'\bar{z}a'=|\bar{a}z'|^2=|a\bar{z}'|^2=z\bar{a}'a\bar{z}',$$

上式可写为

$$1-|w|^2=\frac{1}{|1-\bar{a}z'|^2}\{s^2+z(\bar{a}'a-A\overline{A}')\bar{z}'\}.$$

如果能选取 A，使得 $\bar{a}'a-A\overline{A}'=-s^2I_n$，那么便有

$$1-|w|^2=\frac{s^2}{|1-\bar{a}z'|^2}(1-|z|^2). \tag{12}$$

这样，(11) 便是把 B_n 映入 B_n 的全纯映射了. 现在问题归结为寻找满足下述条件的 n 阶方阵 A：

$$\begin{cases}A\bar{a}'=\bar{a}', & (13)\\ A\overline{A}'-\bar{a}'a=s^2I_n. & (14)\end{cases}$$

为此，如果 $a\neq 0$，命 $P=\dfrac{1}{|a|^2}\bar{a}'a$；如果 $a=0$，命 $P=0$. 不难验证

$$A = sI_n + (1-s)P$$

便满足条件（13）和（14）。于是得

定理 2.3.9 对于每个 $a \in B_n$，记 $s^2 = 1 - |a|^2$，如果 $a \neq 0$，$P = \frac{1}{|a|^2}\bar{a}'a$；如果 $a = 0$，$P = 0$. $A = sI_n + (1-s)P$，那么

$$\varphi_a(z) = \frac{a - zA}{1 - \bar{a}z'}$$

具有下列性质：

(i) $\varphi_a(0) = a, \varphi_a(a) = 0$;

(ii) $\varphi'_a(0) = a'\bar{a} - A', \varphi'_a(a) = -\frac{A'}{s^2}$;

这里 $\varphi'_a(0)$，$\varphi'_a(a)$ 分别记映射 φ_a 在 $z=0$ 和 $z=a$ 处的导数.

(iii) 对 $z \in \bar{B}_n$，有

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z'|^2};$$

(iv) φ_a 是对合变换，即 $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$；

(v) $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(B_n)$.

证 (i) $\varphi_a(0) = a$ 是显然的. 由（13）得 $a = a\bar{A}' = aA$，所以 $\varphi_a(a) = 0$.

(ii) 因为

$$\begin{aligned}\varphi_a(z) &= (a - zA)(1 + \bar{a}z' + o(|z|)) \\ &= a - zA + z\bar{a}'a + o(|z|) \\ &= \varphi_a(0) + z(\bar{a}'a - A) + o(|z|),\end{aligned}$$

根据全纯映射导数的定义 2.1.2，即得

$$\varphi'_a(0) = a'\bar{a} - A'.$$

为了计算 $\varphi'_a(a)$，注意

$$\varphi_a(a+h) - \varphi_a(a) = \varphi_a(a+h) = -\frac{hA}{s^2}\left(1 - \frac{\bar{a}h'}{s^2}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{hA}{s^2}\left(1 + \frac{\bar{a}h'}{s^2} + o(|h|)\right)$$

$$= -\frac{hA}{s^2} + o(|h|),$$

由此即得 $\varphi'_a(a) = -\frac{A'}{s^2}$.

(iii) 由 (12) 即得.

(iv) 记 $H=\varphi_a \circ \varphi_a$，则由 (iii) 知，$H$ 是把 B_n 映入 B_n 的全纯映射，由 (i) 得 $H(0)=\varphi_a(\varphi_a(0))=0$. 由命题 2.1.3 及(ii)可得

$$H'(0) = \varphi'_a(a)\varphi'_a(0) = -\frac{A'}{s^2}(a'\bar{a} - A') = I_n.$$

于是由定理 2.3.1 即得 $\varphi_a(\varphi_a(z))=z$ 对 $z\in B_n$ 成立.

(v) 由 (iii) 知，φ_a 是把 B_n 映入 B_n 的全纯映射，由 (iv) 得 $\varphi_a^{-1}=\varphi_a$ 是全纯的，因而 $\varphi_a\in \text{Aut}(B_n)$. □

利用这个定理中找到的 φ_a，我们可以定出 $\text{Aut}(B_n)$ 的全部自同构.

定理 2.3.10 设 $\psi\in \text{Aut}(B_n)$. 如果 $\psi(a)=0$，则必存在唯一的酉方阵 U，使得对每个 $z\in B_n$，有

$$\psi(z) = \varphi_a(z)U.$$

证 记 $f=\psi \circ \varphi_a$，则 $f\in \text{Aut}(B_n)$，且 $f(0)=\psi(a)=0$，由定理 2.3.8 知 f 是一个酉变换，即存在酉方阵 U，使得 $\psi(\varphi_a(w))=wU$. 命 $\varphi_a(w)=z$，则 $w=\varphi_a(z)$，因而得 $\psi(z)=\varphi_a(z)U$. U 的唯一性是显然的. □

利用这个定理，可把定理 2.3.9 (iii) 写成更一般的形式.

命题 2.3.11 设 $\psi\in \text{Aut}(B_n)$. 如果 $\psi(a)=0$，则对 $z\in \overline{B}_n$，$w\in \overline{B}_n$，有等式

$$1 - \psi(z)\overline{\psi(w)}' = \frac{(1-|a|^2)(1-z\overline{w}')}{(1-\bar{a}z')(1-a\overline{w}')}. \tag{15}$$

证 由定理 2.3.10，存在酉方阵 U，使得 $\psi(z) = \varphi_a(z)U$，

因而

$$1-\psi(z)\,\overline{\psi(w)}'=1-\varphi_a(z)\,\overline{\varphi_a(w)}'.$$

从 φ_a (z) 的表达式，可以直接算出

$$1-\varphi_a(z)\,\overline{\varphi_a(w)}'=\frac{(1-|a|^2)(1-z\overline{w}')}{(1-\overline{a}z')(1-a\overline{w}')},$$

所以 (15) 成立. □

在今后的讨论中，我们经常需要用 Aut (B_n) 中的自同构对球上的积分作变换. 为此要计算它的 Jacobian 的值.

定理 2.3.12 设 $\psi\in$ Aut (B_n). 如果 ψ (a) $=0$，那么

$$(J_R\psi)(z)=\left(\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z'|^2}\right)^{n+1}. \tag{16}$$

证 固定 $z\in B_n$，记 $w=\psi$ (z). 命 $f=\varphi_w\circ\psi\circ\varphi_z$，则 $f\in$ Aut (B_n)，且 f (0) $=0$. 由定理 2.3.8，存在酉方阵 U，使得 f (ζ) $=\zeta U$，由此即得 $\psi(\eta)=\varphi_w(\varphi_z(\eta)U)$，$\eta\in B_n$. 由命题 2.1.3 得

$$\psi'(z)=\varphi_w'(0)(\varphi_z(z)U)'=\varphi_w'(0)(\varphi_z'(z))'U,$$

这里 (φ_z' (z))$'$是方阵 $\varphi_z'(z)$的转置. 于是

$$|(J\psi)(z)|^2=|\det\psi'(z)|^2=|\det\varphi'_w(0)|^2|\det\varphi_z'(z)|^2. \tag{17}$$

由定理 2.3.9 (ii)，我们有

$$\varphi_w'(0)=w'\overline{w}-sI_n-\frac{w'\overline{w}}{1+s}=-s\left(I_n-\frac{1}{1+s}w'\overline{w}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\det\varphi_w'(0)&=(-1)^n s^n\det\left(I_n-\frac{1}{1+s}w'\overline{w}\right)=(-1)^n s^n\left(1-\frac{|w|^2}{1+s}\right)\\&=(-1)^n s^{n+1}=(-1)^n(1-|w|^2)^{\frac{n+1}{2}}.\end{aligned} \tag{18}$$

由于

$$\varphi_z'(z)=-\frac{1}{s^2}\left(sI_n+\frac{z'\overline{z}}{1+s}\right)=-\frac{1}{s}\left(I_n+\frac{z'\overline{z}}{s(1+s)}\right),$$

所以

$$\det\varphi_z'(z)=\frac{(-1)^n}{s^n}\det\left(I_n+\frac{z'\bar{z}}{s(1+s)}\right)$$
$$=\frac{(-1)^n}{s^n}\left(1+\frac{|z|^2}{s(1+s)}\right)=\frac{(-1)^n}{s^{n+1}}$$
$$=(-1)^n(1-|z|^2)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{19}$$

把（18）和（19）代入（17），并注意到命题 2.1.5，即得

$$(J_R\psi)(z)=|(J\psi)(z)|^2=\left(\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}\right)^{n+1}. \tag{20}$$

由（15）可得

$$1-|w|^2=1-|\psi(z)|^2=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z'|^2},$$

代入（20）即得（16）. □

2.3.3 多圆柱和球的非全纯等价性

下面给出多圆柱 U^n 和球 B_n 非全纯等价性的证明.

定义 2.3.13 设 Ω_1 和 Ω_2 是 $\mathbf{C}^n$ 中两个域. 如果存在双全纯映射把 Ω_1 映为 Ω_2，就称 Ω_1 和 Ω_2 是**全纯等价**的.

在单复变中，Riemann 定理断言，凡边界点多于一个的单连通域必与单位圆盘全纯等价. 因此单位圆盘在单复变中是具有代表性的域. 多复变中的情况要复杂得多，即使两个最简单的域——多圆柱和球也不是全纯等价的. 这一事实首先由 Poincaré 所指出.

命题 2.3.14 单位球 B_n 是 $\mathbf{C}^n$ 中的可递域.

证 任取 a，$b\in B_n$，则有 $\varphi_a\in\mathrm{Aut}(B_n)$，使得 $\varphi_a(a)=0$，同时有 $\varphi_b\in\mathrm{Aut}(B_n)$，使得 $\varphi_b(0)=b$，命 $\psi=\varphi_b\circ\varphi_a$，则 $\psi\in\mathrm{Aut}(B_n)$，且 $\psi(a)=b$，所以 B_n 是可递域. □

定理 2.3.15 多圆柱 U^n 和球 B_n 不全纯等价.

证 如果 U^n 和 B_n 全纯等价，那么存在双全纯映射 F，$F(B_n)=U^n$. 由于 B_n 是圆型的，而且是有界可递的，U^n 也是圆

型的. 由定理 2.3.6, 必存在线性映射把 B_n 映为 U^n, 但线性映射把球映为椭球, 不可能是多圆柱. 这个矛盾证明了 U^n 和 B_n 不是全纯等价的. □

这个定理的另一个证明见定理 2.5.15.

§2.4 Schwarz 引 理

2.4.1 星形圆型域的 Schwarz 引理

在单复变中, Schwarz 引理讨论把单位圆盘映入单位圆盘的全纯函数的性质:

(i) 如果 $f: U \to U$ 是全纯的, 那么

$$|f'(0)| \leqslant 1,$$

其中等号成立的充分必要条件是 $f(z)=cz$, c 是模为 1 的复数.

(ii) 如果 $f: U \to U$ 是全纯的, 而且 $f(0)=0$, 那么

$$|f(z)| \leqslant |z|, \quad z \in U,$$

其中等号成立的条件和 (i) 相同.

对 $\mathbf{C}^n$ 中的域附加适当条件, 也有类似的 Schwarz 引理. 为此, 先证明下面的

命题 2.4.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界圆型凸域, 对每个 $z \in \mathbf{C}^n$, 定义

$$p(z) = \inf\{c > 0: \frac{z}{c} \in \Omega\},$$

那么 (i) $p(z)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上一个新的范数; (ii) 在范数 $p(z)$ 下, $\mathbf{C}^n$ 是一个 Banach 空间; (iii) $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n: p(z) < 1\}$.

$p(z)$ 通常称为域 Ω 的 Minkowski 泛函.

证 (i) 要证明 p 是 $\mathbf{C}^n$ 上的范数, 就是要证明 p 满足下列三个条件: (a) $p(z) \geqslant 0$, $p(z)=0$ 的充要条件是 $z=0$; (b) $p(z+w) \leqslant p(z)+p(w)$ 对任意 $z, w \in \mathbf{C}^n$ 成立; (c) $p(\lambda z)$

$=|\lambda|p(z)$对任意 $\lambda\in\mathbf{C}, z\in\mathbf{C}^n$ 成立. 先证(a). $p(z)\geqslant 0$ 是显然的，$p(0)=0$ 也是显然的. 今设 $p(z)=0$ 要证 $z=0$. 因为 Ω 是有界域，故存在 $R>0$，使得 $\Omega\subset B(0, R)$. 于是对任意 $z\neq 0$，$\frac{Rz}{|z|}$ 是长度为 R 的向量，因此 $\frac{Rz}{|z|}\notin\Omega$，所以 $\frac{|z|}{R}<p(z)$，即 $p(z)>0$，故 $p(z)=0$ 时必有 $z=0$，这就证明了 (a). 为了证明 (b)，命 $c_1=p(z)+\frac{\varepsilon}{2}, c_2=p(w)+\frac{\varepsilon}{2}$，则 $\frac{z}{c_1}\in\Omega$，$\frac{w}{c_2}\in\Omega$，由于 Ω 是凸的，所以

$$\frac{z+w}{c_1+c_2}=\frac{c_1}{c_1+c_2}\ \frac{z}{c_1}+\frac{c_2}{c_1+c_2}\ \frac{w}{c_2}\in\Omega,$$

因而 $c_1+c_2\geqslant p(z+w)$，即 $p(z+w)\leqslant p(z)+p(w)+\varepsilon$，让 $\varepsilon\to 0$ 即得三角形不等式. 现在证明 (c). 设 $\lambda\in\mathbf{C}$，由于 Ω 是圆型的，所以从 $\frac{z}{p(z)+\varepsilon}\in\Omega$ 可以导出 $\frac{\lambda}{|\lambda|}\ \frac{z}{p(z)+\varepsilon}\in\Omega$，这说明 $|\lambda|(p(z)+\varepsilon)\geqslant p(\lambda z)$，让 $\varepsilon\to 0$，即得 $p(\lambda z)\leqslant|\lambda|p(z)$. 另一方面，由于 $\frac{\lambda z}{p(\lambda z)+\varepsilon}\in\Omega$，还因为 Ω 是圆型的，

$$\frac{|\lambda|z}{p(\lambda z)+\varepsilon}=\frac{\frac{|\lambda|}{\lambda}\lambda z}{p(\lambda z)+\varepsilon}\in\Omega,$$

所以 $p(\lambda z)+\varepsilon\geqslant|\lambda|p(z)$，让 $\varepsilon\to 0$，即得 $p(\lambda z)\geqslant|\lambda|p(z)$，因而 $p(\lambda z)=|\lambda|p(z)$. 所以 p 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个范数.

(ii) 由于有穷维线性空间上的范数都是等价的，所以新范数 $p(z)$ 和老范数 $|z|$ 是等价的. 因而在新范数下，$\mathbf{C}^n$ 也是一个 Banach 空间.

(iii) 任取 $z\in\Omega$，因为 Ω 是开集，故必有 $0<r<1$，使得 $\frac{z}{r}\in\Omega$，所以 $p(z)\leqslant r<1$. 反之，如果 $p(z)<1$，取 c 使得 $p(z)<c<1$，于是 $\frac{z}{c}\in\Omega$，由于 Ω 是凸的且包含原点，因而 $z=$

$(1-c)\cdot 0+c\left(\frac{z}{c}\right)\in\Omega$. 这就证明了

$$\Omega=\{z\in\mathbf{C}^n:p(z)<1\}.\quad\square$$

定义 2.4.2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域. 如果对任意的 $z\in\Omega$ 及 $0\leqslant r\leqslant 1$ 有 $rz\in\Omega$, 就称 Ω 是**星形域**.

对于星形圆型域, Schwarz 引理有如下的推广.

定理 2.4.3 设 Ω_1 和 Ω_2 分别是 $\mathbf{C}^n$ 和 $\mathbf{C}^m$ 中的星形圆型域, 其中 Ω_2 还是凸的有界域. 如果 $F:\Omega_1\to\Omega_2$ 是全纯的, 那么

(i) $F'(0)$ 把 Ω_1 映入 Ω_2;

(ii) 如果 $F(0)=0$, 那么对任意 $0<r<1$ 有 $F(r\Omega_1)\subset r\Omega_2$.

证 因为 Ω_2 是 $\mathbf{C}^m$ 中的圆型的有界凸域, 故可仿命题 2.4.1 的做法在 $\mathbf{C}^m$ 中引进范数:

$$\|w\|=\inf\{c>0:c^{-1}w\in\Omega_2\}.$$

$\mathbf{C}^m$ 中引进这个范数后所得的空间记为 Y, 它是一个 Banach 空间, 它的单位球正是 Ω_2, 即

$$\Omega_2=\{w\in\mathbf{C}^m:\|w\|<1\}.$$

现在固定 $z\in r\Omega_1$, $0<r\leqslant 1$. 因为 Ω_1 是开的, 故必有 $t<r$, 使得 $z\in t\Omega_1$. 即 $t^{-1}z\in\Omega_1$. 因为 Ω_1 是星形圆型域, 所以对任意 $\lambda\in U$, $\lambda t^{-1}z\in\Omega_1$, 因而 $F(\lambda t^{-1}z)\in\Omega_2$. 今设 T 是 Y 上任一范数为 1 的有界线性泛函, 定义

$$g(\lambda)=T(F(\lambda t^{-1}z)).$$

则 g 是 U 上的全纯函数, 而且

$$|g(\lambda)|\leqslant\|T\|\,\|F(\lambda t^{-1}z)\|<1.$$

于是由单复变的 Schwarz 引理得 $|g'(0)|\leqslant 1$. 但

$$\frac{1}{\lambda}(g(\lambda)-g(0))=T\left(\frac{1}{\lambda}(F(\lambda t^{-1}z)-F(0))\right)$$

$$=T(F'(0)t^{-1}z+o(1)),$$

即 $g'(0)=T(F'(0)t^{-1}z)$. 由 Hahn-Banach 定理,

$$\| F'(0)t^{-1}z \| = \sup\{ |T(F'(0)t^{-1}z)| ; T \in Y^*, \|T\| = 1\} \leqslant 1$$

这说明 $F'(0)t^{-1}z \in \overline{\Omega}_2$，或者

$$F'(0)z \in t\overline{\Omega}_2 \subset r\Omega_2,$$

即 $F'(0)(r\Omega_1) \subset r\Omega_2$，这就证明了 (i).

如果 $F(0)=0$，那么 $g(0)=0$，这时由单复变的 Schwarz 引理得 $|g(\lambda)| \leqslant |\lambda|$，$\lambda \in U$. 因而

$$\| F(\lambda t^{-1}z) \| = \sup\{ |T(F(\lambda t^{-1}z))| ; T \in Y^*, \|T\| = 1\}$$
$$\leqslant |\lambda|.$$

这说明 $\lambda^{-1}F(\lambda t^{-1}z) \in \overline{\Omega}_2$. 让 $\lambda = t$，即得

$$F(z) \in t\overline{\Omega}_2 \subset r\Omega_2,$$

因而 $F(r\Omega_1) \subset r\Omega_2$. □

看两个简单的例子.

例 2.4.4 设 $F: B_n \to U$ 是全纯的，这时

$$F'(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}(0), \cdots, \frac{\partial F}{\partial z_n}(0) \right),$$

根据定理 2.4.3，它把 $z \in B_n$ 映入 U，即

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial z_k}(0) \ z_k \right| < 1.$$

由此即得

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial z_k}(0) \right|^2 \leqslant 1.$$

例 2.4.5 设 $F: U \to B_m$ 是全纯的，记 $F = (f_1, \cdots, f_m)$，这时 $F'(0)$ 把 $\lambda \in U$ 映入 B_m，即 $(f'_1(0)\lambda, \cdots, f'_m(0)\lambda) \in B_m$，由此即得

$$\sum_{k=1}^{m} |f'_k(0)|^2 \leqslant 1.$$

如果 Ω_1，Ω_2 都是球，利用 Schwarz 引理可得

定理 2.4.6 (i) 如果 $F: B_n \to B_m$ 是全纯的，$a \in B_n$，$F(a)=b$，那么 $|\varphi_b(F(z))| \leqslant |\varphi_a(z)|$ 对每个 $z \in B_n$ 成立. 或者

$$\frac{|1-F(z)\overline{F(a)}'|^2}{(1-|F(z)|^2)(1-|F(a)|^2)}$$
$$\leqslant\frac{|1-z\overline{a}'|^2}{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}. \tag{1}$$

(ii)如果 $m=n$，且 $F\in \mathrm{Aut}(B_n)$，那么 $|\varphi_b(F(z))|=|\varphi_a(z)|$，即（1）的等号成立.

证 (i) 命 $G=\varphi_b\circ F\circ\varphi_a$，则 G: $B_n\to B_m$ 是全纯的，而且 $G(0)=(\varphi_b\circ F\circ\varphi_a)(0)=0$. 于是由 Schwarz 引理，有 $|G(z)|\leqslant|z|$，即 $|(\varphi_b\circ F\circ\varphi_a)(z)|\leqslant|z|$，由此即得

$$|\varphi_b(F(z))|\leqslant|\varphi_a(z)|. \tag{2}$$

由（2）再利用定理 2.3.9（iii）即得（1）.

(ii) 如果 $m=n$，且 $F\in\mathrm{Aut}(B_n)$，则 $F^{-1}(b)=a$，对 F^{-1} 用 (i) 得

$$|\varphi_a(F^{-1}(w))|\leqslant|\varphi_b(w)|,$$

即 $|\varphi_a(z)|\leqslant|\varphi_b(F(z))|$，再用 (i) 的不等式即得

$$|\varphi_b(F(z))|=|\varphi_a(z)|.\quad\square$$

2.4.2 全纯映射的从属原理

作为 Schwarz 引理的一个简单应用，我们引进从属映射的概念.

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的凸有界圆型域，F: $\Omega\to\mathbf{C}^n$，G: $\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是两个全纯映射. 如果存在全纯映射 φ: $\Omega\to\Omega$，$\varphi(0)=0$，使得

$$F(z)=G(\varphi(z)),z\in\Omega,$$

就说 F 从属于 G，记为 $F\prec G$.

很明显，如果 $F\prec G$，那么 $F(\Omega)\subset G(\Omega)$，且 $F(0)=G(0)$. 在一定的条件下，它的逆也是成立的.

命题 2.4.7 如果 G 是 Ω 上的双全纯映射，那么 $F\prec G$ 的充分必要条件是 $F(0)=G(0)$ 和 $F(\Omega)\subset G(\Omega)$.

证 必要性已如上述，现证充分性. 因为 G 是双全纯的，所以 G^{-1} 在 $G(\Omega)$ 上全纯. 于是

$$\varphi(z)=G^{-1}(F(z)),z\in\Omega \tag{3}$$

在 Ω 上全纯，且 $\varphi(\Omega)\subset\Omega,\varphi(0)=0$. 从 (3) 即得

$$F(z)=G(\varphi(z)). \quad \square$$

从命题 2.4.7 和 Schwarz 引理便可得到下面的从属原理.

定理 2.4.8 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界圆型凸域. $F:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是全纯的，$G:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是双全纯的. 如果 $F(0)=G(0)$，且 $F(\Omega)\subset G(\Omega)$，那么对任意 $0<r<1$ 有

$$F(r\Omega)\subset G(r\Omega).$$

证 从命题 2.4.7 得知 $F\prec G$，因而存在 $\varphi:\Omega\to\Omega$，$\varphi(0)=0$，使得 $F(z)=G(\varphi(z))$ 对每个 $z\in\Omega$ 成立. 但由定理 2.4.3 (ii) 得 $\varphi(r\Omega)\subset r\Omega$，$0<r<1$，由此即得

$$F(r\Omega)=G(\varphi(r\Omega))\subset G(r\Omega). \quad \square$$

§2.5 多圆柱和球上的星形映射和凸映射

2.5.1 多圆柱上的星形映射

设 $f:U\to\mathbf{C}$ 是单叶全纯函数，如果 $f(U)$ 是 $\mathbf{C}$ 中的星形域，就称 f 是**星形函数**. 如果 $f(U)$ 是 $\mathbf{C}$ 中的凸域，就称 f 是**凸函数**. f 是 U 上的星形函数或凸函数的充分必要条件分别是

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\geqslant 0,\qquad z\in U,$$

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\geqslant 0,\quad z\in U.$$

现在把星形函数和凸函数的概念推广到 $\mathbf{C}^n$.

定义 2.5.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的域，$f:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 是双全纯映射. 如果 $f(0)=0$，$f(\Omega)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的星形域，就称 f 是 Ω 上的

星形映射；如果 $f(\Omega)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的欧氏凸域，就称 f 是 Ω 上的**凸映射**.

下面我们要给出 f 是 U^n 上的星形映射或凸映射的充分必要条件. 为此引进映射类 P. 在下面的讨论中记 $\|z\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|$，$z=(z_1,\cdots,z_n)$.

定义 2.5.2 P 是满足下面两个条件的全纯映射 g：$U^n\to\mathbf{C}^n$ 的全体：

(i) $g(0)=0$；

(ii) 当 $\|z\|=|z_j|>0$ 时，

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{g_j(z)}{z_j}\right\}\geqslant 0,$$

这里 $g=(g_1,\cdots,g_n)$.

我们需要下面三个引理.

引理 2.5.3 设对每个 $t\in I=[0,1]$，全纯映射族 $\varphi(z;t)$：$U^n\to U^n$ 满足下面两个条件：

(i) $\varphi(z;0)=z$，$\varphi(0;t)=0$；

(ii) 存在 $\rho>0$，使得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{z-\varphi(z;t)}{t^\rho}=g(z) \tag{1}$$

存在，且 $g\in H(U^n)$.

那么 $g\in P$.

证 从 (1) 知道 $g(0)=0$. 记 $\varphi(z;t)=(\varphi_1(z;t),\cdots,\varphi_n(z;t))$，从 (1)知必有 $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi_k(z;t)=z_k$，$k=1,\cdots,n$. 命

$$\psi_k(z;t)=\frac{2z_k(z_k-\varphi_k(z;t))}{z_k+\varphi_k(z;t)},\ k=1,\cdots,n.$$

当 $z_k\neq 0$ 时，ψ_k 是 U^n 中的全纯函数. 由定理 2.4.1，

$$\|\varphi(z;t)\|\leqslant\|z\|. \tag{2}$$

于是当 $\|z\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|=|z_j|>0$ 时，由 (2) 可得

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\psi_j(z;t)}{z_j}\right\}=2\operatorname{Re}\frac{z_j-\varphi_j}{z_j+\varphi_j}$$
$$=\frac{z_j-\varphi_j}{z_j+\varphi_j}+\frac{\bar{z}_j-\bar{\varphi}_j}{\bar{z}_j+\bar{\varphi}_j}$$
$$=\frac{2\ (|z_j|^2-|\varphi_j|^2)}{|z_j+\varphi_j|^2}\geqslant 0.$$

而由条件（ii）得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\psi_j(z;t)}{t^\rho}=\lim_{t\to 0^+}\frac{z_j-\varphi_j(z;t)}{t^\rho}\frac{2z_j}{z_j+\varphi_j(z;t)}$$
$$=g_j(z),$$

所以

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{g_j(z)}{z_j}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{z_j}\lim_{t\to 0^+}\frac{\psi_j(z;t)}{t^\rho}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^\rho}\operatorname{Re}\left\{\frac{\psi_j(z;t)}{z_j}\right\}\geqslant 0.$$

这就证明了 $g\in P$. □

引理 2.5.4 设 $f: U^n\to\mathbf{C}^n$ 是双全纯映射，$f(0)=0$. 如果全纯映射族 $F(z;t): U^n\to\mathbf{C}^n$ 满足：

(i) $F(z;0)=f(z)$，$F(0;t)=0$，$(t\in I)$；

(ii) 对每个 $t\in I$，$F(z;t)\prec f(z)$；

(iii) 存在 $\rho>0$，使得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(z;0)-F(z;t)}{t^\rho}=h(z)$$

存在，且 $h\in H(U^n)$.

那么 $h(z)=f'(z)g(z)$，其中 $g\in P$，$f'(z)$ 是 f 的导数，即 f 的复 Jacobi 矩阵.

证 由条件（ii），存在 $\varphi(z;t): U^n\to U^n$，使得

$$f(\varphi(z,t))=F(z,t),\ z\in U^n,\ t\in I,$$

且 $\|\varphi(z;t)\|\leqslant\|z\|$. 命 $\zeta=\varphi(z;t)$，把 $f_j(\zeta)$ $(j=1,\cdots,n)$ 在 $\zeta=z$ 处展开成幂级数：

$$f_j(\zeta)=f_j(z)+\frac{\partial f_j(z)}{\partial z_1}(\zeta_1-z_1)+\cdots$$
$$+\frac{\partial f_j(z)}{\partial z_n}(\zeta_n-z_n)+R_j(\zeta;z),$$

写成向量的形式，便得

$$f(\varphi(z;t))=f(z)+f'(z)(\varphi(z;t)-z)$$
$$+R(\varphi(z,t),z),$$

这里$\frac{\|R(\zeta;z)\|}{\|\zeta-z\|}\to 0$（当$\|\zeta-z\|\to 0$时）．于是

$$\frac{F(z;0)-F(z;t)}{t^\rho}$$
$$=f'(z)\frac{z-\varphi(z;t)}{t^\rho}-\frac{R(\varphi(z;t),z)}{t^\rho}. \tag{3}$$

我们证明

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{R(\varphi(z;t),z)}{t^\rho}=0. \tag{4}$$

因为

$$\frac{R(\varphi(z;t),z)}{t^\rho}$$
$$=\frac{R(\varphi(z;t),z)}{\varphi(z;t)-z}\frac{\varphi(z;t)-z}{t^\rho},$$

所以只须证明，当$t\to 0^+$时，$\frac{\|\varphi(z;t)-z\|}{t^\rho}$有界．若不然，则存在$\{t_k\}$，$t_k\to 0^+$使得$\frac{\|\varphi(z;t_k)-z\|}{t_k^\rho}\to\infty$．在（3）两端取极限得

$$h(z)=\lim_{k\to\infty}\left\{\left(f'(z)\frac{z-\varphi(z;t_k)}{\|z-\varphi(z;t_k)\|}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{R(\varphi(z;t_k),z)}{\|z-\varphi(z;t_k)\|}\right)\frac{\|\varphi(z;t_k)-z\|}{t_k^\rho}\right\},$$

因为

$$\frac{R(\varphi(z;t_k),z)}{\|\varphi(z;t_k)-z\|}\to 0,$$

因而只能有

$$f'(z)\frac{z-\varphi(z;t_k)}{\|z-\varphi(z;t_k)\|}\to 0,$$

因为 $(f'(z))^{-1}$存在，所以

$$\frac{z-\varphi(z;t_k)}{\|z-\varphi(z;t_k)\|}\to 0.$$

但这是不可能的，因而 (4) 成立. 现在在 (3) 两端命 $t\to 0^+$，利用引理 2.5.3，即得 $h(z)=f'(z)g(z)$，其中 $g\in P$. □

引理 2.5.5 设 $f: U^n\to \mathbf{C}^n$ 是全纯映射，如果存在 $g\in P$，使得 $f(z)=f'(z)g(z)$，那么当 $\|z\|=|z_j|>0$ 时，

$$\mathrm{Re}\,\frac{g_j(z)}{z_j}>0.$$

证 取 $a\in U^n$，使得 $\|a\|=|a_j|>0$. 命 $\lambda_k=\frac{a_k}{a_j}$，$k=1,\cdots,n$. 则 $|\lambda_k|\leqslant 1$，$k=1,\cdots,n$. 现命 $z=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)z_j$，$|z_j|<1$，则有 $\|z\|=|z_j|>0$. 按 g 的定义有 $\mathrm{Re}\,\frac{g_j(z)}{z_j}\geqslant 0$，$0<|z_j|<1$，由于 $f(z)=f'(z)g(z)$，写成分量的形式

$$f_j(z)=\frac{\partial f_j(z)}{\partial z_1}g_1(z)+\cdots+\frac{\partial f_j(z)}{\partial z_n}g_n(z),\quad j=1,\cdots,n.$$

把上边等式两端的函数都在 $z=0$ 处展开成幂级数，并比较一次项的系数可得$\frac{\partial g_j(0)}{\partial z_k}=\delta_{jk}$，因而 $g_j(z)$ 在 $z=0$ 处有展开式：

$$g_j(z)=z_j+o(|z|),\quad j=1,\cdots,n.$$

于是$\frac{g_j(z)}{z_j}\to 1$，$z_j\to 0$. 由于 $\mathrm{Re}\,\frac{g_j(z)}{z_j}$是$|z_j|<1$ 中的调和函数，既然在 $0<|z_j|<1$ 中有 $\mathrm{Re}\,\frac{g_j(z)}{z_j}\geqslant 0$ 且 $\lim\limits_{z_j\to 0}\frac{g_j(z)}{z_j}=1$，故必有

$$\mathrm{Re}\,\frac{g_j(z)}{z_j}>0,\quad |z_j|<1.\qquad □$$

现在给出 f 是 U^n 上星形映射的条件.

定理 2.5.6 设 $f: U^n \to \mathbf{C}^n$ 是星形映射，那么一定存在 $g \in P$，使得 $f(z) = f'(z)g(z)$，这里 f 和 g 都写成列向量．反之，设 $f: U^n \to \mathbf{C}^n$ 是全纯映射，$f(0) = 0$，对每个 $z \in U^n$，$f'(z)$ 非异．如果存在 $g \in P$，使得 $f(z) = f'(z)g(z)$，那么 f 是 U^n 上的星形映射．

证 定理的前半部分容易证明．按照星形映射的定义，f 是双全纯的，如果命

$$F(z; t) = (1-t)f(z), \quad t \in [0, 1],$$

那么由命题 2.4.7，$F(z;t) \prec f(z)$，而且

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(z; 0) - F(z; t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(z) - (1-t)f(z)}{t} = f(z).$$

于是从引理 2.5.4 即得 $f(z) = f'(z)g(z)$，其中 $g \in P$．

现在证明定理的后半部分．我们首先证明，如果 f 在 rU^n $(0<r\leqslant 1)$ 中双全纯，那么 $f(rU^n)$ 是星形域．固定 $z \in rU^n$，记 $\Omega = f(rU^n)$，则 $f(z) \in \Omega$，只要证明对任意 $t \in [0, 1]$，$(1-t)f(z) \in \Omega$．因为 Ω 是开集，所以存在 $t_0 > 0$，使得当 $-t_0 < t < t_0$ 时，$(1-t)f(z) \in \Omega$．因为 f 在 rU^n 中双全纯．定义

$$\varphi(z;t) = f^{-1}((1-t)f(z)), \quad -t_0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

或者 $f(\varphi(z;t)) = (1-t)f(z)$，即 $\varphi(z;0) = z$．记 $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$，让上式两端对 t 求导数，并让 $t=0$ 得：

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial z_1} \frac{\partial \varphi_1(z;0)}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_n} \frac{\partial \varphi_n(z;0)}{\partial t} = -f_1(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_n(z)}{\partial z_1} \frac{\partial \varphi_1(z;0)}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_n} \frac{\partial \varphi_n(z;0)}{\partial t} = -f_n(z),$$

写成向量形式：$f'(z)\dfrac{\partial \varphi(z;0)}{\partial t} = -f(z)$．因为 $f'(z)$ 非异，故有

$\dfrac{\partial \varphi(z;0)}{\partial t} = -(f'(z))^{-1}f(z)$．把 $\varphi(z; t)$ 在 $t=0$ 处展开：

$$
\begin{aligned}
\varphi(z;t) &= \varphi(z;0)+\frac{\partial\varphi(z;0)}{\partial t}t+o(t)\\
&= z-(f'(z))^{-1}f(z)t+o(t)\\
&= z-(f'(z))^{-1}f'(z)g(z)t+o(t)\\
&= z-g(z)t+o(t),
\end{aligned}
$$

这里 $g\in P$. 我们证明 $\|\varphi(z;t)\|$ 作为 t 的函数在 $0<t\leqslant t_0$ 中严格单调下降. 设 $\|z\|=|z_j|>0$, 则

$$
\begin{aligned}
\|\varphi(z;t)\|^2 &\geqslant |\varphi_j(z;t)|^2\\
&= |z_j|^2\left(1-2t\mathrm{Re}\left(\frac{g_j(z)}{z_j}\right)+o(t)\right), \qquad (5)
\end{aligned}
$$

故当 $-t_0<t<0$ 时, 由引理 2.5.5, $\|\varphi(z;t)\|>|z_j|=\|z\|=\|\varphi(z;0)\|$. 取 $0<s<t<t_0$, 命 $\tau=\frac{s-t}{1-t}$, 则 $-t_0<\tau<0$. 记 $w=\varphi(z;t)$,则有 $\|\varphi(w;\tau)\|>\|w\|=\|\varphi(z;t)\|$, 由此得

$$
\begin{aligned}
\|\varphi(z;s)\| &= \|f^{-1}((1-s)f(z))\|\\
&= \|f^{-1}((1-\tau)(1-t)f(z))\|\\
&= \|f^{-1}((1-\tau)f(w))\|\\
&= \|\varphi(w;\tau)\|>\|\varphi(z;t)\|.
\end{aligned}
$$

由此可得 $\|\varphi(z;t_0)\|\leqslant\|z\|<r$. 现在取 $t_0<p<2t_0-t_0^2$, 命 $t=\frac{p-t_0}{1-t_0}$, 则 $0<t<t_0$. 且 $1-p=(1-t_0)(1-t)$. 记 $\zeta=\varphi(z;t_0)=f^{-1}((1-t_0)f(z))$, 则 $\|\zeta\|<r$. 由上面的讨论 $\|\varphi(\zeta;t)\|\leqslant\|\zeta\|<r$,即

$$
\begin{aligned}
&\|f^{-1}((1-t)f(\zeta))\|\\
&= \|f^{-1}((1-t)(1-t_0)f(z))\|\\
&= \|f^{-1}((1-p)f(z))\|<r.
\end{aligned}
$$

这说明 $(1-p)f(z)\in\Omega$. 继续这个做法,便可证明对任意 $0\leqslant t\leqslant 1$, $(1-t)f(z)\in\Omega$, 故 Ω 是星形域.

现在证明 f 在 U^n 上是单叶的,因而双全纯. 因为 $f'(0)$ 非异,

故存在 $\rho>0$，f 在 ρU^n 中是单叶的．现在证明 f 在 $\rho\overline{U}^n$ 上也是单叶的．如果存在 $z,w,z\neq w$，$\|z\|\leqslant\|w\|=\rho$，使得 $f(z)=f(w)$．定义

$$\varphi(z;t)=f^{-1}((1-t)f(z)),$$
$$\varphi(w;t)=f^{-1}((1-t)f(w)).$$

由引理 2.5.5 和 (5)，可取 t 充分小，使得 $\varphi(z;t)$，$\varphi(w;t)\in\rho U^n$，且 $\varphi(z;t)\neq\varphi(w;t)$，但

$$\begin{aligned}f(\varphi(z;t))&=(1-t)f(z)\\&=(1-t)f(w)=f(\varphi(w;t)).\end{aligned}$$

这就和 f 在 ρU^n 上单叶相矛盾．

现在再证明，如果 f 在 ρU^n 上是单叶的，那么存在 $\varepsilon>0$，使得 f 在 $(\rho+\varepsilon)U^n$ 上是单叶的．为此，我们设法构造连续的非负函数 ψ: $U^n\times U^n\to\mathbf{R}$，使得 $\psi(z,w)=0$ 的充分必要条件是 $z\neq w$，且 $f(z)=f(w)$．进而证明 ψ 在 $\rho\overline{U}^n\times\rho\overline{U}^n$ 上取正值，因而存在 $\varepsilon>0$，使得 ψ 在 $(\rho+\varepsilon)U^n\times(\rho+\varepsilon)U^n$ 上取正值，所以当 $z,w\in(\rho+\varepsilon)U^n$，$z\neq w$ 时，$f(z)\neq f(w)$，即 f 在 $(\rho+\varepsilon)U^n$ 上是单叶的．为了构造这样的 ψ，定义

$$a_{jk}=\begin{cases}\dfrac{f_j(z_1,\cdots,z_k,w_{k+1},\cdots,w_n)-f_j(z_1\cdots,z_{k-1},w_k,\cdots,w_n)}{z_k-w_k}, & z_k\neq w_k,\\[2ex] \dfrac{\partial f_j}{\partial z_k}(z_1,\cdots,z_k,w_{k+1},\cdots,w_n), & z_k=w_k,\end{cases}$$

$$G(z,w)=\det(a_{jk}).$$

命

$$\psi(z,w)=|G(z,w)|+\sum_{j=1}^{n}|f_j(z)-f_j(w)|.$$

如果 z，$w\in U^n$，$z\neq w$ 但 $f(z)=f(w)$，那么 $G(z,w)$ 的 n 个列向量线性相关，因而 $G(z,w)=0$，所以 $\psi(z,w)=0$．反之，如果 $\psi(z,w)=0$，则必 $f(z)=f(w)$，而 $\psi(z,z)=|G(z,z)|=|\det f'(z)|>0$，所以必有 $z\neq w$．现因 f 在 $\rho\overline{U}^n$ 上单叶，所以

ψ 在$\overline{\rho U^n}\times\rho\overline{U}^n$ 上取正值. □

2.5.2 多圆柱上的凸映射

现在给出 f 是 U^n 上凸映射的条件.

定理 2.5.7 设 $f: U^n\to\mathbf{C}^n$ 是全纯映射，$f(0)=0$，$f'(z)$对每个 $z\in U^n$ 非奇异，则 f 是 U^n 上的凸映射的充要条件是，存在单位圆盘上的凸映射 φ_j $(j=1,\cdots,n)$ 和非奇异方阵 T，使得

$$f(z)=(\varphi_1(z_1),\cdots,\varphi_n(z_n))T. \tag{6}$$

证 条件的充分性是明显的. 现证必要性. 设 f 是 U^n 上的凸映射，那么 f 在 U^n 上是双全纯的. 如果记 $f(U^n)=\Omega$，那么 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的欧氏凸域. 命

$$A_t(z)=(z_1e^{iA_1t},\cdots,z_ne^{iA_nt}),A_j\geqslant 0,j=1,\cdots,n,$$

则 A_t 是 U^n 的自同构，$A_0(z)=z$. 对于任意 $z\in U^n$，显然 $f(A_t(z))\in\Omega,f(A_{-t}(z))\in\Omega$,由 Ω 的欧氏凸性有

$$\frac{1}{2}(f(A_t(z))+f(A_{-t}(z)))\in\Omega.$$

若记

$$F(z;t)=\frac{1}{2}\{f(A_t(z))+f(A_{-t}(z))\},$$

则由命题 2.4.7,

$$F(z;t)\prec f(z),0\leqslant t\leqslant 1.$$

记 $q(t)=f(A_t(z))$,把 $q(t)$在 $t=0$ 处展开得:

$$f(A_t(z))=f(z)+q'(0)t+\frac{1}{2}q''(0)t^2+o(t^2),$$

$$f(A_{-t}(z))=f(z)-q'(0)t+\frac{1}{2}q''(0)t^2+o(t^2),$$

因而

$$F(z;0)-F(z;t)=f(z)-\frac{1}{2}\{f(A_t(z))+f(A_{-t}(z))\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(f(z)-f(A_t(z)))$$

$$+ (f(z) - f(A_{-t}(z)))\}$$

$$= -\frac{1}{2}q''(0)t^2 + o(t^2),$$

所以

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(z;0)-F(z;t)}{t^2} = -\frac{1}{2}q''(0).$$

如果记 $h(z) = -\frac{1}{2}q''(0)$，通过直接计算得

$$h(z) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial z_j\partial z_k}A_jA_kz_jz_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_k}A_k^2z_k\right\},$$

写成分量的形式：

$$2h_j(z) = \sum_{k=1}^{n}A_k^2\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_k^2}z_k^2 + \frac{\partial f_j}{\partial z_k}z_k\right) + 2\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_l\partial z_k}A_kA_lz_kz_l. \tag{7}$$

由引理 2.5.4，存在 $g\in P$，使得

$$h(z) = f'(z)g(z). \tag{8}$$

显然，g 和参数 A_k 的选取有关. 现在固定 k，$1\leqslant k\leqslant n$，选取 $A_k=1$，$A_l=0$，$l\neq k$. 我们证明，在这组 A_j 的选取下有 $g_j(z)\equiv 0$，$j\neq k$. 为此，选取 $z\in U^n$，使得 $\|z\| = |z_j|>0$，$j\neq k$，但 $z_k=0$. 对这样的 z，从 (7) 知 $h_j(z)=0$，$j=1,\cdots,n$. 但从 $h(z)=f'(z)g(z)$ 可得

$$g_j(z) = \frac{\det J_j(z)}{(Jf)(z)}, j = 1,\cdots,n,$$

这里 $(Jf)(z)=\det f'(z)$，

$$J_j(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_1}\cdots h_1\cdots\frac{\partial f_1(z)}{\partial z_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_1}\cdots h_n\cdots\frac{\partial f_n(z)}{\partial z_n}\end{vmatrix}.$$

因而 $g_j(z)=0$，当然 $\frac{g_j(z)}{z_j}=0$，故由引理 2.5.5 得 $g_j(z)\equiv 0$，$j\neq k$. 于是从(8)得

$$h_j(z) = \frac{\partial f_j(z)}{\partial z_1} g_1(z) + \cdots + \frac{\partial f_j(z)}{\partial z_n} g_n(z) = \frac{\partial f_j(z)}{\partial z_k} g_k(z),$$

$$j = 1, \cdots, n.$$

比较(7)得

$$\frac{\partial^2 f_j(z)}{\partial z_k^{\ 2}} z_k^2 + \frac{\partial f_j(z)}{\partial z_k} z_k = \frac{\partial f_j(z)}{\partial z_k} \psi_k(z),$$

$$1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{9}$$

这里 $\psi_k(z) = 2g_k(z) \in P$.

再固定 $l \neq k$，并选取 $A_k = 1, A_l = \epsilon, A_m = 0, m \neq k, l$，从(7)得

$$2h_j(z) = \frac{\partial^2 f_j}{\partial z_k^2} z_k^2 + \frac{\partial f_j}{\partial z_k} z_k + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_l^2} z_l^2 + \frac{\partial f_j}{\partial z_l} z_l \right)$$

$$+ 2\epsilon z_k z_l \frac{\partial^2 f_j}{\partial z_k \partial z_l}. \tag{10}$$

把(9)代入(10)得

$$2h_j(z) = \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \psi_k + \epsilon^2 \frac{\partial f_j}{\partial z_l} \psi_l + 2\epsilon z_k z_l \frac{\partial^2 f_j}{\partial z_k \partial z_l}.$$

于是在这组参数下，相应的 g 为

$$g_j(z) = \frac{1}{(Jf)(z)} \underset{j\text{列}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdots h_1 \cdots \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} \cdots h_n \cdots \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{(Jf)(z)} \left\{ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial z_k} \psi_k \cdots \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial z_k} \psi_k \cdots \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \right.$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial f_1}{\partial z_l}\psi_l\cdots\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial z_l}\psi_l\cdots\frac{\partial f_n}{\partial z_n}\end{vmatrix}+\varepsilon z_k z_l\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_k\partial z_l}\cdots\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}\cdots\underset{j\text{列}}{\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_k\partial z_l}}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial z_n}\end{vmatrix}\right\}.$$

当 $j\neq k$ 时，第一个行列式为 0；当 $j\neq l$ 时，第二个行列式也为 0，当 $j=l$ 时，第二个行列式为 ψ_l (Jf) (z)，所以有

$$g_j(z)=\varepsilon\frac{z_k z_l G_j}{(Jf)(z)}+O(\varepsilon^2),\quad j\neq k.$$

这里 G_j 表示第三个行列式. 由引理 2.5.5，当 $\|z\|=|z_j|>0$ 时，$\mathrm{Re}\left\{\frac{z_k z_l G_j}{z_j(Jf)(z)}\right\}>0$. 但当 $z_k z_l=0$ 时，上式却等于 0，所以只能有 $G_j\equiv 0$，$j=1$，…，n. 因而向量 $\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_k\partial z_l},\ \cdots,\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_k\partial z_l}\right)$ 可以写成向量 $\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1},\ \cdots,\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}\right)$，…，$\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_n},\ \cdots,\ \frac{\partial f_n}{\partial z_n}\right)$ 的线性组合，即

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_k\partial z_l}=c_1\frac{\partial f_j}{\partial z_1}+\cdots+c_n\frac{\partial f_j}{\partial z_n},\quad j=1,\cdots,n.$$

由此得

$$c_j=\frac{G_j}{(Jf)(z)}=0,j=1,\cdots,n.$$

因而 $\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_k\partial z_l}=0$，$j=1$，…，$n$. 由此便得

$$f_j(z)=\sum_{m=1}^{n}a_{jm}\varphi_{jm}(z_m),j=1,\cdots,n,\tag{11}$$

这里 φ_{jm} 是单位圆盘上的全纯函数. 把 f_j 的这个表达式代入(9)得

$$1+z_k\frac{\varphi''_{jk}(z_k)}{\varphi'_{jk}(z_k)}=\frac{\psi_k}{z_k},1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant n.\tag{12}$$

这说明每个 φ_{jk} 都是单位圆盘 U 上的凸映射. 因为上式右端和 j 无关，因而

$$1+z_k\frac{\varphi''_{jk}(z_k)}{\varphi'_{jk}(z_k)}=1+z_k\frac{\varphi''_{lk}(z_k)}{\varphi'_{lk}(z_k)},j\neq l.$$

由此便得 $\varphi_{lk}=c\varphi_{jk}$. 因而可在（11）中适当选取常数 a_{jm}, 使得 $\varphi_{jk}=\varphi_{lk}=\varphi_k$. 于是

$$f_j(z)=\sum_{m=1}^{n}a_{jm}\varphi_m(z_m),j=1,\cdots,n. \qquad \square$$

这个定理有很多有趣的应用，定理 2.5.15 便是其中之一.

2.5.3 球上的星形映射

现在讨论球上的星形映射和凸映射. 为了给出 f 是 B_n 上的星形映射或凸映射的条件，我们需要下面这些引理.

引理 2.5.8 设 f 是 B_n 上的双全纯映射，$f(0)=0$. $f(B_n)$是星形域或欧氏凸域的充分必要条件是，对任意的 $0<r<1$, $f(rB_n)$是星形域或欧氏凸域.

证 条件的充分性是显然的. 现证必要性. 先设 $f(B_n)$是星形的，要证对每个 $r\in(0,1)$, $f(rB_n)$也是星形的. 为此取 $a\in rB_n$, 则 $|a|<r$, $f(a)\in f(rB_n)$. 由于对任意 $z\in B_n$, $f(z)\in f(B_n)$, 因为 $f(B_n)$是星形的，所以对任意 $t\in(0,1)$, $tf(z)\in f(B_n)$. 定义

$$u(z,t)=f^{-1}(tf(z)),$$

则 $u(z,t)\in B_n$, 且 $u(0,t)=0$. 故由 Schwarz 引理，$|u(z,t)|\leqslant|z|$. 特别命 $z=a$, 即得 $|u(a,t)|\leqslant|a|<r$. 由此即得 $tf(a)\in f(rB_n)$. 故 $f(rB_n)$是星形的.

现在设 $f(B_n)$是欧氏凸的，要证对任意 $r\in(0,1)$, $f(rB_n)$是欧氏凸的. 为此取 $a,b\in rB_n$, 设 $|b|\leqslant|a|<r$, 要证对 $t\in[0,1]$,

$$tf(a)+(1-t)f(b)\in f(rB_n).$$

对于 $z\in B_n$，容易知道

$$\frac{|\langle z,a\rangle|}{|a|^2}|b|\leqslant\frac{|z|}{|a|}|b|\leqslant|z|<1,$$

即 $\frac{\langle z,a\rangle}{|a|^2}b\in B_n$, 由于 $f(B_n)$是欧氏凸的，所以

$$tf(z)+(1-t)f\left(\frac{(z,a)}{|a|^2}b\right)\in f(B_n).$$

定义

$$v(z,t)=f^{-1}\left(tf(z)+(1-t)f\left(\frac{(z,a)}{|a|^2}b\right)\right),$$

则 $v(z,t)\in B_n$，且 $v(0,t)=0$. 由 Schwarz 引理 $|v(z,t)|\leqslant|z|$. 命 $z=a$ 得 $|v(a,t)|\leqslant|a|<r$，即

$$tf(a)+(1-t)f(b)\in f(rB_n). \qquad \square$$

引理 2.5.9 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的域，$g:\Omega\to\mathbf{R}$ 是定义在 Ω 上的实函数. 如果 g 有二阶连续偏导数，则有下列 Taylor 展开：

$$g(z)=g(0)+2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g(0)}{\partial z_j}z_j\right)$$
$$+\mathrm{Re}\left\{\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 g(0)}{\partial z_j\partial z_k}z_jz_k+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 g(0)}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}z_j\bar{z}_k\right\}+o(|z|^2). \tag{13}$$

证 写 $z_j=x_j+iy_j$，把 g 看成 $\mathbf{R}^{2n}$中的域 Ω 上的函数，则有下列 Taylor 展开式：

$$g(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)=g(0)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g(0)}{\partial x_j}x_j+\frac{\partial g(0)}{\partial y_j}y_j\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 g(0)}{\partial x_j\partial x_k}x_jx_k+\frac{\partial^2 g(0)}{\partial x_j\partial y_k}x_jy_k+\frac{\partial^2 g(0)}{\partial y_j\partial x_k}y_jx_k\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 g(0)}{\partial y_j\partial y_k}y_jy_k\right\}+o(|x|^2+|y|^2), \tag{14}$$

利用记号

$$\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

把$\frac{\partial}{\partial x_j}$，$\frac{\partial}{\partial y_j}$，$\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}$等都化成$\frac{\partial}{\partial z_j}$，$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$，$\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial z_k}$等，并利用$\left(\overline{\frac{\partial g}{\partial z_j}}\right)=\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}$等关系，从(14)即得(13). $\square$

引进记号

$$\frac{\partial}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_m}\right),\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'=\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_n}\right)',$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z'\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \end{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial \bar{z}_1} \cdots \frac{\partial^2}{\partial z_1\partial \bar{z}_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2}{\partial z_n\partial \bar{z}_1} \cdots \frac{\partial^2}{\partial z_n\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix}.$$

引理 2.5.10 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，φ: $\Omega\to\mathbf{R}$ 有二阶连续偏导数，f: $\Omega\to\mathbf{C}^n$是双全纯映射. 定义

$$\Phi(w) = \varphi(f^{-1}(w)), w \in f(\Omega).$$

那么，(i) $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(dz)' = \frac{\partial\Phi}{\partial w}(dw)'$；

(ii) $dw\frac{\partial^2\Phi}{\partial w'\partial \bar{w}}\overline{dw'} = dz\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial \bar{z}}\overline{dz'}$；

(iii) $$dw\frac{\partial^2\Phi}{\partial w'\partial w}dw' = dz\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial z}dz' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} dz\frac{\partial^2 f_1}{\partial z'\partial z}dz' \\ \vdots \\ dz\frac{\partial^2 f_n}{\partial z'\partial z}dz' \end{pmatrix}.$$

证 因为 $\varphi(z) = \Phi(f(z))$，$f = (f_1, \cdots, f_n)$，所以

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial w_k}\frac{\partial f_k}{\partial z_j},\quad j = 1,\cdots,n.$$

即

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial z_n}\right)=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial w_1},\cdots,\frac{\partial\Phi}{\partial w_n}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial z_n}\end{pmatrix},$$

即$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial w}\frac{df}{dz}$，这里$\frac{df}{dz}=f'(z)$. 于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(dz)'=\frac{\partial\Phi}{\partial w}\frac{df}{dz}(dz)'=\frac{\partial\Phi}{\partial w}(dw)'.$$

这就是 (i). 为了证 (ii)，注意

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\overline{z}_l}&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial w_k\partial\overline{w}_j}\left(\overline{\frac{\partial f_j}{\partial z_l}}\right)\frac{\partial f_k}{\partial z_i}\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial z_i}\frac{\partial^2\Phi}{\partial w_k\partial\overline{w}_j}\left(\overline{\frac{\partial f_j}{\partial z_l}}\right).\end{aligned}$$

由此可得矩阵等式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial\overline{z}}=\left(\frac{df}{dz}\right)'\frac{\partial^2\Phi}{\partial w'\partial\overline{w}}\overline{\frac{df}{dz}},$$

或者

$$dz\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial\overline{z}}\overline{dz}'=dz\left(\frac{df}{dz}\right)'\frac{\partial^2\Phi}{\partial w'\partial\overline{w}}\overline{\frac{df}{dz}}\overline{dz}'=dw\frac{\partial^2\Phi}{\partial w'\partial\overline{w}}\overline{dw}'.$$

最后证明 (iii). 因为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial z_l}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial w_k\partial w_j}\frac{\partial f_j}{\partial z_l}\frac{\partial f_k}{\partial z_i}+\frac{\partial\Phi}{\partial w_k}\frac{\partial^2 f_k}{\partial z_i\partial z_l}\right),$$

即

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial z}=\left(\frac{df}{dz}\right)'\frac{\partial^2\Phi}{\partial w'\partial w}\frac{df}{dz}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial w_k}\frac{\partial^2 f_k}{\partial z'\partial z},$$

或者

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial w'\partial w}=\left(\frac{df}{dz}\right)'^{-1}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial z}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial w_k}\frac{\partial^2 f_k}{\partial z'\partial z}\right\}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1},$$

于是

$$dw\frac{\partial^2\Phi}{\partial w'\partial w}dw' = dz\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial z} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial w_k}\frac{\partial^2 f_k}{\partial z'\partial z}\right\}dz'$$

$$= dz\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial z}dz' - \frac{\partial\Phi}{\partial w}\begin{pmatrix} dz\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z'\partial z}dz' \\ \vdots \\ dz\dfrac{\partial^2 f_n}{\partial z'\partial z}dz' \end{pmatrix}$$

$$= dz\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial z}dz' - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1}\begin{pmatrix} dz\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z'\partial z}dz' \\ \vdots \\ dz\dfrac{\partial^2 f_n}{\partial z'\partial z}dz' \end{pmatrix}. \quad \square$$

设 $z=(z_1, \cdots, z_n)\in\mathbf{C}^n$，记 $z_j=x_j+iy_j$，那么可写

$$z=(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n).$$

它可以看成是 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的点．设另有 $w=(w_1, \cdots, w_n)$，写 $w_j=u_j+iv_j$，则 $w=(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)$ 也可看成 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的点．现把 z，w 都看成 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的向量，它们的内积是

$$z\cdot w=\sum_{j=1}^{n}(x_ju_j+y_jv_j).$$

作为 $\mathbf{C}^n$ 中的向量，它们的内积为

$$\langle z,w\rangle=\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{w}_j.$$

容易看出，这两个内积之间有关系式：

$$z\cdot w=\operatorname{Re}\langle z,w\rangle.$$

作为实向量，它们之间的夹角 θ 定义为

$$\cos\theta=\frac{z\cdot w}{|z||w|}=\frac{\operatorname{Re}\langle z,w\rangle}{|z||w|}.$$

所以 θ 为锐角的充分必要条件是 $\operatorname{Re}\langle z, w\rangle$ 取正值．

讨论多圆柱上的星形映射时，映射类 P 起着重要的作用．对球上的星形映射，我们要引进下面的映射类 Q．

定义 2.5.11 Q 是满足下面两个条件的全纯映射 $g: B_n \to \mathbf{C}^n$ 的全体：

(i) $g(0)=0$;

(ii) 当 $z \in B_n$ 时，$\mathrm{Re}\, g(z)\bar{z}' \geqslant 0$.

现在可以证明下面的

定理 2.5.12 设 $f: B_n \to \mathbf{C}^n$ 是双全纯映射，$f(0)=0$，那么 f 是星形映射的充分必要条件是存在 $g \in Q$，使得

$$f(z) = f'(z)g(z), \tag{15}$$

这里 f,g 都写成列向量的形式.

证 必要性 设 $f(B_n)$是星形域. 由引理 2.5.8,对任意 t, $0<t<1$, $f(tB_n)$也是星形域. 记 $\varphi_t(z)=z\bar{z}'-t^2$,则 $tB_n=\{z\in\mathbf{C}^n; \varphi_t(z)<0\}$. 记 $\Phi_t(w)=\varphi_t(f^{-1}(w))$,命

$\Omega_t=\{w\in\mathbf{C}^n; \Phi_t(w)<0\}$,

则 $\Omega_t=f(tB_n)$,所以 Ω_t 对任意 $0<t<1$ 都是星形的. 任取 $w\in\partial\Omega_t$, 则 $\Phi_t(w)=0$. 由引理 2.5.9,对充分小的 $\varepsilon>0$ 有

$$\begin{aligned}\Phi_t\left(w+\varepsilon\frac{\partial\Phi_t}{\partial w}\right) &= 2\mathrm{Re}\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi_t}{\partial w}\left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial w}\right)'\right)+O(\varepsilon^2)\\ &= 2\varepsilon\left|\frac{\partial\Phi_t}{\partial w}\right|^2+O(\varepsilon^2)>0.\end{aligned}$$

这说明当 ε 充分小时，$w+\varepsilon\dfrac{\partial\Phi_t}{\partial w}$永远在 Ω_t 的外部，即$\dfrac{\partial\Phi_t}{\partial w}$是 $\partial\Omega_t$ 在 w 处的外法向量. 由于对任意 $0<t_0<1$, $(1-t_0)w\in\Omega_t$,所以 $\cos\left(-\dfrac{\partial\Phi_t}{\partial w}, -w\right)>0$,即 $\mathrm{Re}\,\dfrac{\partial\Phi_t}{\partial w}w'>0$. 因为$\dfrac{\partial\varphi_t}{\partial z}=\dfrac{\partial\Phi_t}{\partial w}f'(z)$,而$\dfrac{\partial\varphi_t}{\partial z}=\bar{z}$,于是得 $\mathrm{Re}\{\bar{z}(f'(z))^{-1}w'\}>0$. 因为 f 记为列向量,即 $w'=f(z)$,上式即$\mathrm{Re}\{\bar{z}(f'(z))^{-1}f(z)\}>0$. 记

$$g(z)=(f'(z))^{-1}f(z),$$

则 $g\in Q$,且 $f(z)=f'(z)g(z)$. 这就证明了条件的必要性.

充分性 如果(15)成立,那么对于 $w\in\partial\Omega_t$,存在 $\varepsilon>0$,当 $0<\tau$

$<\varepsilon$ 时，$(1-\tau)w\in\Omega_t$. 由此可以证明对于 $0<\tau<1$，都有 $(1-\tau)w\in\Omega_t$. 因为如果存在 $\tau_1<1$ 使得 $(1-\tau_1)w\in\partial\Omega_t$，而对所有 $0<\tau<\tau_1$ 有 $(1-\tau)w\in\Omega_t$. 那么记 $(1-\tau_1)w=w_0\in\partial\Omega_t$，则对任意小的正数 τ，若写 $(1-\tau)(1-\tau_1)=1-\rho$，则 $\rho>\tau_1$，于是 $(1-\tau)w_0=(1-\tau)\cdot(1-\tau_1)w=(1-\rho)w\notin\Omega_t$，这是一个矛盾. 因而 Ω_t 是星形的，所以 $f(\overline{B}_n)$ 是星形的. □

2.5.4 球上的凸映射

现在来讨论 $f(B_n)$ 是欧氏凸域的条件. 由引理 2.5.8，$f(B_n)$ 是欧氏凸域的充分必要条件是对任意 $t\in(0,1)$，$\Omega_t=f(tB_n)$ 是欧氏凸域. 任取 $w\in\partial\Omega_t$ 及在 w 处的切向量 dw，那么 Ω_t 是欧氏凸域的条件是 $w+dw$ 在 Ω_t 的外部，即 $\Phi_t(w+dw)>0$ 对每个 $w\in\partial\Omega_t$ 及在 w 处的切向量 dw 成立. 按照引理 2.5.9 把 $\Phi_t(w+dw)$ 展开得

$$\Phi_t(w+dw)=\Phi_t(w)+2\mathrm{Re}\left(dw\left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial w}\right)'\right)$$
$$+\mathrm{Re}\{dw\frac{\partial^2\Phi_t}{\partial w'\partial w}(dw)'+dw\frac{\partial^2\Phi_t}{\partial w'\partial\overline{w}}(d\overline{w})'\}+o(|dw|^2),\tag{16}$$

因为 $w\in\partial\Omega_t$，$\Phi_t(w)=0$；又因为 $\frac{\partial\Phi_t}{\partial w}$ 是 $\partial\Omega_t$ 在 w 处的法向量，所以 $\mathrm{Re}\left(dw\left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial w}\right)'\right)=0$. 把引理 2.5.10 的(ii)、(iii)代入(16)即得

$$\Phi_t(w+dw)=$$
$$\mathrm{Re}\left\{dz\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial z'\partial z}dz'-\frac{\partial\varphi_t}{\partial z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1}\begin{pmatrix}dz\frac{\partial^2 f_1}{\partial z'\partial z}dz'\\ \vdots\\ dz\frac{\partial^2 f_n}{\partial z'\partial z}dz'\end{pmatrix}+dz\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial z'\partial\overline{z}}d\overline{z}'\right\}$$
$$+o(|dw|^2).$$

现在 $\varphi_t(z)=z\overline{z}'-t^2$，所以 $\frac{\partial\varphi_t}{\partial z_j}=\overline{z}_j$，$\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial z_j\partial z_k}=0$，$\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}=\delta_{jk}$，因而 $\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial z'\partial z}$

$=0,\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial z'\partial z}=I_n$. 于是有

$$\Phi_t(w+dw)=\mathrm{Re}\left\{|dz|^2-\bar{z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1}\begin{pmatrix}dz\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial z'\partial z}dz'\\ \vdots\\ dz\,\frac{\partial^2 f_n}{\partial z'\partial z}dz'\end{pmatrix}\right\}$$

$$+o(|dw|^2).$$

因而 Ω_t 是欧氏凸的充分必要条件为

$$\mathrm{Re}\left\{|dz|^2-\bar{z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1}\begin{pmatrix}dz\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial z'\partial z}dz'\\ \vdots\\ dz\,\frac{\partial^2 f_n}{\partial z'\partial z}dz'\end{pmatrix}\right\}>0. \tag{17}$$

为了把(17)写得更简洁些，我们引进如下的记号：设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$分别是 $m\times n$ 和 $p\times q$ 矩阵，称

$$A\times B=\begin{pmatrix}a_{11}B & \cdots & a_{1n}B\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B\end{pmatrix}$$

为 A 和 B 的直积，$A\times B$ 是 $mp\times nq$ 矩阵. 这里我们只引进这个概念，在§3.4 中讨论典型域的核函数时，还要研究它的一些基本性质. 现在定义

$$\begin{aligned}f''(z)&=\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_n}\right)\times f'(z)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial z_1}f'(z),\cdots,\frac{\partial}{\partial z_n}f'(z)\right)\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}\cdots\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_n\partial z_1}\cdots\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1\partial z_n}\cdots\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_n^2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_1^2}\cdots\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_n\partial z_1}\cdots\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_1\partial z_n}\cdots\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_n^2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，定义

$$\alpha^2=\alpha\times\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\times(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$
$$=(\alpha_1^2,\cdots,\alpha_1\alpha_n,\cdots,\alpha_n\alpha_1,\cdots,\alpha_n^2).$$

这里 $f''(z)$是 $n\times n^2$ 矩阵，α^2 是 $1\times n^2$ 矩阵.

在(17)中命 $\alpha=\dfrac{dz}{|dz|}$，则 α 是单位向量，而且满足 $\mathrm{Re}(\bar{z}\alpha')=0$. 于是(17)便可写成较为简洁的形式：

$$\mathrm{Re}\{1-\bar{z}(f'(z))^{-1}f''(z)(\alpha^2)'\}>0. \tag{18}$$

这样，我们已经证明了

定理 2.5.13 设 $f:B_n\to\mathbf{C}^n$ 是双全纯映射，$f(0)=0$，那么 $f(B_n)$是欧氏凸的充分必要条件是，对每一个 $z\in B_n$ 及满足 $\mathrm{Re}(\bar{z}\alpha')=0$的单位向量 α，有

$$\mathrm{Re}\{1-\bar{z}(f'(z))^{-1}f''(z)(\alpha^2)'\}>0.$$

下面看一个例子.

例 2.5.14 如果 $\eta\in\mathbf{C}$，$|\eta|<\dfrac{1}{2}$，那么

$$f(z)=(z_1+\eta z_2^2,z_2,\cdots,z_n)$$

是 B_n 上的凸映射.

解 事实上，$f^{-1}(z)=(z_1-\eta z_2^2, z_2, \cdots, z_n)$ 它是双全纯的，且 $f(0)=0$，容易算出

$$f'(z)=\begin{pmatrix}1 & 2\eta z_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

$$(f'(z))^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\eta z_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

$$f''(z)=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 0 & 2\eta & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned}&\bar{z}(f'(z))^{-1}f''(z)(\alpha^2)'\\&=(\bar{z}_1,-2\eta\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2,\bar{z}_3,\cdots,\bar{z}_n)\begin{pmatrix}2\eta\alpha_2^2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\&=2\eta\bar{z}_1\alpha_2^2,\end{aligned}$$

因而

$$|\bar{z}(f'(z))^{-1}f''(z)(\alpha^2)'|<1.$$

由定理 2.5.13，f 是 B_n 上的凸映射.

作为定理 2.5.7 和定理 2.5.13 的一个应用，史济怀[Sh 1]给出球和多圆柱不全纯等价的一个新证明.

定理 2.5.15 多圆柱 U^n 和球 B_n 不全纯等价.

证 如果 U^n 和 B_n 全纯等价，那么存在 U^n 上的双全纯映射 f，使得 $f(U^n)=B_n$. 由于 U^n 是可递的，不妨设 $f(0)=0$. 因为 B_n 是凸的，由定理 2.5.7，f 可写为

$$f(z)=(g_1(z_1),\cdots,g_n(z_n))T,$$

这里 T 是 n 阶非奇异方阵，$g_j(z_j)(j=1,\cdots,n)$ 是单位圆盘 $|z_j|<1$ 上的凸映射. 考虑

$$\varphi^{(1)}(z)=(z_1,z_2,\cdots,z_n+\eta z_1^2),|\eta|<\frac{1}{2}.$$

由例 2.5.14，$\varphi^{(1)}$是 B_n 上的凸映射，因而 $\varphi^{(1)}\circ f$ 是 U^n 上的凸映射，再用定理 2.5.7 得

$$(\varphi^{(1)}\circ f)(z)=(h_1^{(1)}(z_1),\cdots,h_n^{(1)}(z_n))S^{(1)},$$

这里 $S^{(1)}$是 n 阶非异方阵，$h_j^{(1)}(z_j)$ 是 $|z_j|<1$ 上的凸映射. 由此得

$$\begin{aligned}(h_1^{(1)}(z_1),\cdots,h_n^{(1)}(z_n))S^{(1)}&=(f_1,f_2,\cdots,f_n+\eta f_1^2)\\&=(f_1,\cdots,f_n)+(0,\cdots,0,\eta f_1^2),\end{aligned}$$

即

$$(h_1^{(1)}(z_1),\cdots,h_n^{(1)}(z_n))S^{(1)}-(g_1(z_1),\cdots,g_n(z_n))T=(0,\cdots,0,\eta f_1^2),$$

记 $S^{(1)}=(s_{ij}^{(1)})$，$T=(t_{ij})$，比较两端最后一个坐标得

$$\begin{aligned}&\{s_{1n}^{(1)}h_1^{(1)}(z_1)+\cdots+s_{nn}^{(1)}h_n^{(1)}(z_n)\}-\{t_{1n}g_1(z_1)+\cdots+t_{nn}g_n(z_n)\}\\&=\eta(t_{11}g_1(z_1)+\cdots+t_{n1}g_n(z_n))^2.\end{aligned}$$

t_{11}，…，t_{n1}中至少有一个不为 0，不妨设 $t_{11}\neq 0$.

上式两端对 z_1 求导数得

$$\begin{aligned}&s_{1n}^{(1)}(h_1^{(1)}(z_1))'-t_{1n}g'_1(z_1)\\&=2\eta(t_{11}g_1(z_1)+\cdots+t_{n1}g_n(z_n))t_{11}g'_1(z_1).\end{aligned}$$

因为左端是 z_1 的函数，故可得

$$t_{21}=t_{31}=\cdots=t_{n1}=0.$$

再考虑 $\varphi^{(2)}(z)=(z_1+\eta z_2^2,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)$，由例 2.5.14，它是 B_n 上的凸映射，于是由定理 2.5.7 得

$$(\varphi^{(2)}\circ f)(z)=(h_1^{(2)}(z_1),\cdots,h_n^{(2)}(z_n))S^{(2)}.$$

和上而一样做法，即可得

$$t_{12}=t_{32}=\cdots=t_{n2}=0,$$

相继考虑

$$\varphi^{(3)}(z)=(z_1,z_2+\eta z_3^2,\cdots,z_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(n)}(z)=(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}+\eta z_n^2,z_n),$$

它们都是 B_n 上的凸映射，一再用定理 2.5.7，即可得

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ & t_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix},$$

所以

$$f(z)=(t_{11}g_1(z_1),\cdots,t_{nn}g_n(z_n)).$$

它当然不可能把 U^n 映为 B_n. □

这个定理的另一个证明见定理 2.3.9.

§2.6 球上星形映射和凸映射的增长定理和掩盖定理

2.6.1 球上星形映射的增长定理和掩盖定理

设 f 是单位圆盘 U 上的单叶全纯函数，如果 $f(0)=0$，$f'(0)=1$,则称 f 是规范化的单叶全纯函数，用 S 记全体规范化的单叶全纯函数. 对于 $f\in S$，熟知有如下的增长定理与$\frac{1}{4}$掩盖定理：

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2},\quad z\in U,\qquad(1)$$

右端的不等式给出$|f(z)|$增长的一个控制，称为增长定理；从左

端的不等式容易得到

$$f(U) \supset \frac{1}{4}U,$$

称为$\frac{1}{4}$掩盖定理．不等式中等号成立当且仅当 f 为 Koebe 函数 $K(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$的一个适当的旋转.

如果 $f \in S$ 且 $f(U)$ 是凸的，则有比（1）更好的不等式：

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{1-|z|}, \quad z \in U, \tag{2}$$

从左端不等式可得 $f(U) \supset \frac{1}{2}U$，等号成立当且仅当 $f(z)$ 是$\frac{z}{1-z}$的一个适当的旋转.

另外，对于 $f \in S$，其导数也有一个估计，即所谓偏差定理：

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \tag{3}$$

等号成立当且仅当 f 是 Koebe 函数的一个适当的旋转.

1933 年 H. Cartan [Ca 1] 曾提出把单叶全纯函数的这些结果推广到多复变数的双全纯映射．设 f：$B_n \to \mathbf{C}^n$ 是一个双全纯映射，如果 $f(0)=0, f'(0)=I_n$，就称 f 是规范化的双全纯映射．当时 H. Cartan 就指出，这种推广是不成立的．例如

$$f(z)=\left(z_1, \frac{z_2}{(1-z_1)^k}\right), \tag{4}$$

其中 k 是正整数．显然，它是 B_2 上的规范化的双全纯映射，它当然不满足（1），映射（4）的导数是

$$f'(z)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{kz_2}{(1-z_1)^{k+1}} & \frac{1}{(1-z_1)^k} \end{pmatrix},$$

$\det f'(z)=\frac{1}{(1-z_1)^k}$. 因此，若在（3）中把单复变数函数的导数 $f'(z)$ 换成全纯映射导数的行列式，(3) 不成立. 最近，Duren 和 Rudin 在［DR］中举出例子，说明对多圆柱上的规范化的双全纯映射，(3) 也是不成立的. 这样就产生一个问题，在双全纯映射上加上适当的限制，能否把这些结果推广到多复变？这个问题直到近年来才取得了实质性的进展. 1989 年 R. W. Barnard, C. H. Fitz Gerald 和龚昇［BFG 2］首先证明了下面的

定理 2.6.1 如果 $f: B_n\to\mathbf{C}^n$ 是规范化的星形映射，那么对任意 $z\in B_n$ 有

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2},\tag{5}$$

不等式（5）是最好的，但使（5）中等号成立的映射有很多个.

稍后，C. Thomas［Th］和刘太顺［Liu 1］相互独立地就凸映射的情形给出了相应的结果.

定理 2.6.2 如果 $f: B_n\to\mathbf{C}^n$ 是规范化的凸映射，那么对任意 $z\in B_n$ 有

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|},\tag{6}$$

不等式（6）是最好的，但使（6）中等号成立的映射有很多个.

为了给出定理 2.6.1 的证明，我们先证明

引理 2.6.3 设 $g\in Q$（Q 的定义见定义 2.5.11），那么

$$\frac{1-|z|}{|z|(1+|z|)}\cos\theta\leqslant\frac{1}{|g(z)|}\leqslant\frac{1+|z|}{|z|(1-|z|)}\cos\theta$$

对 $z\in B_n$ 成立，这里 θ 是 z 和 $g(z)$ 之间的夹角.

证 固定 $\zeta\in\partial B_n$，λ 是一复数，$0<|\lambda|<1$. 因为 $g\in Q$，所以

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}\,\bar{\zeta}_j g_j(\lambda\zeta)\geqslant 0,$$

即

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}\bar{\zeta}_j\frac{g_j(\lambda\zeta)}{\lambda}\geqslant 0. \tag{7}$$

定义$P(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\bar{\zeta}_j\frac{g_j(\lambda\zeta)}{\lambda}$，则$P$是$0<|\lambda|<1$中的全纯函数. 由于$g(0)=0$，如果定义$P(0)=1$，那么$P$是单位圆盘中的全纯函数. 由(7)，$P$具有正实部，因而得

$$\frac{1-|\lambda|}{1+|\lambda|}\leqslant|\mathrm{Re}P(\lambda)|\leqslant\frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}. \tag{8}$$

如果把$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}\bar{\zeta}_j\frac{g_j(\lambda\zeta)}{\lambda}$看作一个内积，那么它等于$|\zeta|\frac{|g(\lambda\zeta)|}{|\lambda|}\cdot\cos\theta$，这里$\theta$是向量$\zeta$和$\frac{1}{\lambda}g(\lambda\zeta)$之间的夹角，若记$z=\lambda\zeta$，那么$\theta$就是$z$和$g(z)$之间的夹角. 注意$|z|=|\lambda||\zeta|=|\lambda|$，从(8)便可得

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\frac{|g(z)|}{|z|}\cos\theta\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

这就是要证的不等式. □

定理2.6.1的证明 设$0<r<1$，取a，$|a|=r$，使得$|f(a)|$取到$|f(z)|$在rB_n中的最大值. 因为$f(B_n)$是星形的，所以0到$f(a)$的直线段包含在$f(rB_n)$中. 用$z(s)$记这直线段在rB_n中的原像（s是弧长参数），于是

$$\frac{df(z(s))}{ds}=\lambda(z(s))f(z(s)),$$

其中$\lambda(z(s))>0$. 另一方面，

$$\frac{df(z(s))}{ds}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{dz_j}{ds}=f'(z(s))\frac{dz}{ds}.$$

由定理 2.5.12，存在 $g\in Q$，使得 $f(z)=f'(z)g(z)$. 于是

$$\frac{df(z(s))}{ds}=\lambda(z(s))f'(z(s))g(z(s))$$
$$=f'(z(s))\frac{dz}{ds}.$$

因为 $f'(z(s))$ 可逆，由上式即得 $\frac{dz(s)}{ds}=\lambda(z(s))g(z(s))$. 因为 $\left|\frac{dz(s)}{ds}\right|=1$，所以 $\lambda=\frac{1}{|g|}$. 因而得

$$\frac{df(z(s))}{ds}=\frac{1}{|g(z(s))|}f(z(s)). \tag{9}$$

命 $\varphi(s)=|f(z(s))|^2$，由 (9) 得

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{ds}&=\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\frac{dz_k}{ds}\bar{f}_j+\overline{\frac{\partial f_j}{\partial z_k}}\overline{\frac{dz_k}{ds}}f_j\right)\\&=2\mathrm{Re}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\frac{dz_k}{ds}\bar{f}_j=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}\frac{df_j}{ds}\bar{f}_j\\&=2\mathrm{Re}\left\{\frac{df(z(s))}{ds}\overline{f(z(s))}'\right\}\\&=2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{|g(z(s))|}|f(z(s))|^2\right\}\\&=\frac{2}{|g(z(s))|}\varphi(s).\end{aligned} \tag{10}$$

用引理 2.6.3 的右端的不等式，得

$$\frac{d}{ds}\log\varphi(s)\leqslant\frac{2(1+|z(s)|)}{|z(s)|(1-|z(s)|)}\cos\theta(s). \tag{11}$$

这里 $\theta(s)$ 是 $z(s)$ 和 $g(z(s))$ 之间的夹角，但 $g(z(s))$ 和 $\frac{dz(s)}{ds}$ 之间差正数倍，所以 $\theta(s)$ 也是 $z(s)$ 和 $\frac{dz(s)}{ds}$ 之间的夹角，因而 $\frac{d|z(s)|}{ds}=\cos\theta(s)$. 对(11)的两端从 s_0 到 s_1 积分得：

$$\log\varphi(s_1)-\log\varphi(s_0)\leqslant 2\int_{s_0}^{s_1}\frac{1+|z(s)|}{|z(s)|(1-|z(s)|)}\cos\theta(s)ds$$

$$=2\int_{s_0}^{s_1}\frac{1+|z(s)|}{|z(s)|(1-|z(s)|)}d|z(s)|$$

$$=2\int_{|z(s_0)|}^{|z(s_1)|}\frac{1+|z|}{|z|(1-|z|)}d|z|$$

$$=2\log|z(s_1)|-4\log(1-|z(s_1)|)$$

$$-\{2\log|z(s_0)|-4\log(1-|z(s_0)|)\}. \tag{12}$$

因为 f 是规范化的，在 $z=0$ 附近有展开式

$$f(z)=z+o(|z|),$$

所以当 $z\to 0$ 时，z 和 $f(z)$ 很接近；它又是星形的，$f(z)=f'(z)g(z)$，但 $f'(0)=I_n$，所以当 $z\to 0$ 时，$f(z)$ 和 $g(z)$ 也很接近，因而 z 和 $g(z)$ 很接近，所以它们的夹角 θ 当 $z\to 0$ 时也趋于 0，因而 $\frac{d|z(s)|}{ds}\to 1$. 现设 $s_0=\varepsilon$ 是一个小的正数，那么 $|z(s_0)|=\varepsilon+o(\varepsilon)$，$|f(z(s_0))|=\varepsilon+o(\varepsilon)$，从而 $\varphi(s_0)=\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)$. 于是从(12)可得

$$\varphi(s_1)\leqslant\varphi(s_0)\frac{|z(s_1)|^2}{(1-|z(s_1)|)^4}\,\frac{(1-|z(s_0)|)^4}{|z(s_0)|^2}$$

$$\leqslant\frac{|z(s_1)|^2}{(1-|z(s_1)|)^4}\,\frac{\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)}.$$

让 $\varepsilon\to 0$ 得

$$\varphi(s_1)\leqslant\frac{|z(s_1)|^2}{(1-|z(s_1)|)^4}.$$

取 s_1，使得 $z(s_1)=a$，再把 a 记成 z，就得

$$|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

不等式的另外一半容易证明，只要在不等式（10）中对$\frac{1}{|g(z(s))|}$用引理 2.6.3 的左端的不等式，其余的证明是一样的.

为了说明不等式（5）是最好的，先证明下面的

命题 2.6.4 如果$\varphi_j(\lambda)$ $(j=1,\cdots,n)$都是单位圆盘$|\lambda|<1$上的规范化的星形映射，那么

$$f(z)=(\varphi_1(z_1),\cdots,\varphi_n(z_n)),z\in B_n$$

是 B_n 上的星形映射.

证 记 $g(z)=(f'(z))^{-1}f(z)$,则

$$g(z)=\begin{pmatrix}(\varphi_1'(z_1))^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (\varphi_n'(z_n))^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(z_1)\\ \vdots \\ \varphi_n(z_n)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\varphi_1(z_1)}{\varphi'_1(z_1)}\\ \vdots \\ \dfrac{\varphi_n(z_n)}{\varphi'_n(z_n)}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\langle g(z),z\rangle=\sum_{j=1}^{n}g_j(z)\bar{z}_j=\sum_{j=1}^{n}\bar{z}_j\frac{\varphi_j(z_j)}{\varphi'_j(z_j)}=\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\frac{\varphi_j(z_j)}{z_j\varphi'_j(z_j)},$$

因为 $\mathrm{Re}\left(z_j\dfrac{\varphi_j'(z_j)}{\varphi_j(z_j)}\right)\geqslant 0$，所以 $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{\varphi_j(z_j)}{z_j\varphi_j'(z_j)}\right\}\geqslant 0$， $j=1,\cdots,n$. 因而 $\mathrm{Re}\langle g(z),z\rangle\geqslant 0$，即 $g\in Q$. 由定理 2.5.12，f 是 B_n 上的星形映射. □

再回到定理 2.6.1，命

$$f(z)=\left(\frac{z_1}{(1-z_1)^2},\cdots,\frac{z_n}{(1-z_n)^2}\right).$$

由命题 2.6.4，它是 B_n 上的规范化的星形映射. 当 $z=re_j$ 时，(5) 的等号成立. 这里 e_j 是第 j 个坐标为 1，其它坐标为 0 的单位向量. 从这个例子可以看出，实际上满足命题 2.6.4 条件的每一个映射都可以作为我们的例子.

从定理 2.6.1 容易得到 Koebe 的 $\frac{1}{4}$ 掩盖定理.

定理 2.6.5 如果 $f: B_n\to \mathbf{C}^n$ 是一个星形映射，那么必有 $f(B_n)\supset\frac{1}{4}B_n$，常数 $\frac{1}{4}$ 是最好的.

从定理 2.6.1 的左端的不等式即得定理 2.6.5.

2.6.2 球上凸映射的增长定理和掩盖定理

定理 2.6.2 的证明 先证 (6) 的右端的不等式.

因为 f 是 B_n 上的规范化的全纯映射，它在 B_n 上有展开式

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}f_k(z),\quad z\in B_n,$$

这里每个 $f_k(z)$ 都是 n 维向量，它的每一个分量都是 z 的 k 次齐次多项式. 命

$$g_k(z)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}f(e^{i\frac{2j\pi}{k}}z).$$

因为 f 是凸映射，所以 $g_k\prec f$，于是存在全纯映射 $\psi_k: B_n\to B_n$，$\psi_k(0)=0$，使得

$$g_k(z)=f(\psi_k(z)),\quad z\in B_n,\quad k=1,2,\cdots \tag{13}$$

因为 f_k 的每个分量都是 k 次齐次多项式，所以

$$\begin{aligned}g_k(z)&=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left\{e^{i\frac{2j\pi}{k}}z+\sum_{l=2}^{\infty}e^{i\frac{2jl\pi}{k}}f_l(z)\right\}\\&=f_k(z)+f_{2k}(z)+\cdots,\end{aligned}$$

而

$$f(\psi_k(z))=\psi_k(z)+\sum_{l=2}^{\infty}f_l(\psi_k(z)).$$

从（13）可得

$$f_k(z)+f_{2k}(z)+\cdots=\psi_k(z)+\sum_{l=2}^{\infty}f_l(\psi_k(z)).$$

如果把 ψ_k 也在原点处展开，比较上式两端的最低次项，便知 ψ_k 的最低次项就是 f_k. 于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\psi_k(e^{i\theta}z)|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_k(e^{i\theta}z)\cdot\overline{\psi_k(e^{i\theta}z)'}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_k(e^{i\theta}z)\,\overline{f_k(e^{i\theta}z)'}\,d\theta+p\geqslant|f_k(z)|^2,(p\geqslant 0).$$

因为 ψ_k 是把 B_n 映入 B_n 的映射，上式左端不超过 1，又因为 f_k 的每个分量都是多项式，所以

$$|f_k(z)|\leqslant 1,\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ z\in\overline{B}_n.$$

于是

$$|f_k(z)|=\left|\,|z|^kf_k\left(\frac{z}{|z|}\right)\right|\leqslant|z|^k,\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ z\in B_n.$$

由此便得

$$|f(z)|\leqslant|z|+\sum_{k=2}^{\infty}|f_k(z)|\leqslant|z|+\sum_{k=2}^{\infty}|z|^k$$

$$=\frac{|z|}{1-|z|}. \tag{14}$$

这就证明了(6)的右端的不等式.

因为 $f(B_n)$ 是凸的，原点到 $f(z)$ 的直线段完全落在 $f(B_n)$ 中，记 $z(t)=f^{-1}(tf(z)),0\leqslant t\leqslant 1$，则 $f(z(t))=tf(z)$. 于是 $\dfrac{df(z(t))}{dt}=f(z)=\dfrac{1}{t}f(z(t))$，另一方面，

$$\frac{df(z(t))}{dt}=f'(z(t))\frac{dz(t)}{dt},$$

所以

$$\frac{1}{t}f(z(t))=f'(z(t))\frac{dz(t)}{dt}. \tag{15}$$

设 $\varphi_a\in\mathrm{Aut}B_n$，则 $f(\varphi_a(z))$ 仍然是凸映射，它的展开式为

$$f(\varphi_a(z))=f(\varphi_a(0))+f'(a)\varphi'_a(0)z+\cdots$$

这里 f，z 都写成列向量．命

$$h_a(z)=(\varphi'_a(0))^{-1}(f'(a))^{-1}(f(\varphi_a(z))-f(a)), \qquad (16)$$

则 $h_a(z)=z+\cdots$，即 $h_a(z)$ 是由 $f(\varphi_a(z))$ 经过规范化后所得的凸映射．由（6）的右端的不等式，即得

$$|h_a(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|}. \qquad (17)$$

把（16）中的 z 和 a 都用 $z(t)$ 代替，可得

$$h_{z(t)}(z(t))=(\varphi_{z(t)}'(0))^{-1}(f'(z(t)))^{-1}(-f(z(t))). \qquad (18)$$

注意到

$$(\varphi_{z(t)}'(0))^{-1}=\varphi_{z(t)}'(z(t))=-\frac{A}{1-|z(t)|^2},$$

其中 $A=sI+\frac{1}{1+s}z(t)\overline{z(t)'}$，$s^2=1-|z(t)|^2$，并利用（15），则（18）可写为

$$h_{z(t)}(z(t))=\frac{A}{1-|z(t)|^2}t\frac{dz(t)}{dt},$$

$$\overline{z(t)'}h_{z(t)}(z(t))=\frac{\overline{z(t)'}A}{1-|z(t)|^2}t\quad\frac{dz(t)}{dt}$$

$$=\frac{\bar{z}'(t)t}{1-|z(t)|^2}\frac{dz(t)}{dt},$$

因而

$$2\mathrm{Re}(\overline{z(t)'}h_{z(t)}(z(t)))=\frac{t}{1-|z(t)|^2}2\mathrm{Re}\left(\overline{z(t)'}\frac{dz(t)}{dt}\right)$$

$$=\frac{2t}{1-|z(t)|^2}|z(t)|\frac{d|z(t)|}{dt}.$$

利用（17）便可得

$$\frac{1}{t}\geqslant\frac{1}{|z(t)|(1+|z(t)|)}\frac{d|z(t)|}{dt}, \qquad (19)$$

因为

$$\frac{d|f(z(t))|^2}{dt}=2|f(z(t))|\frac{d|f(z(t))|}{dt},$$

另一方面

$$\frac{d|f(z(t))|^2}{dt}=2\mathrm{Re}\left(\overline{f(z(t))}'\frac{df(z(t))}{dt}\right)$$

$$=\frac{2}{t}|f(z(t))|^2.$$

综合这两等式，并利用（19）得

$$\frac{1}{|f(z(t))|}\frac{d|f(z(t))|}{dt}$$

$$\geqslant\frac{1}{|z(t)|(1+|z(t)|)}\frac{d|z(t)|}{dt}.$$

上式两端对 t 在（ε，1）中积分，并注意到 $z(1)=z$，得

$$\log|f(z)|-\log|f(z(\varepsilon))|\geqslant\log\frac{|z|}{1+|z|}-\log\frac{|z(\varepsilon)|}{1+|z(\varepsilon)|}.$$

注意到 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|f(z(\varepsilon))|}{|z(\varepsilon)|}=1$，即得 $\log|f(z)|\geqslant\log\frac{|z|}{1+|z|}$. 这就是（6）的左端的不等式. □

§2.7 球上凸映射的偏差定理

2.7.1 双全纯映射导数行列式的一个表达式

在上节中我们曾经提到，如果 f 是单位圆盘上的规范化的单叶全纯映射，f' 有如下的估计：

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},\quad z\in U. \tag{1}$$

如果对 f 加上凸的限制，则有更好的估计：

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|)^2},z\in U. \tag{2}$$

前面我们已经举例说明，（1）不能推广到高维. 那么（2）能不能推广？首先对这个问题给出肯定回答的是 Barnard、FitzGerald 和龚昇 [BFG1]，他们于 1990 年证明了下面的结果：

如果 f：$B_2\to\mathbf{C}^2$ 是凸映射，且 $\det f'(0)=1$，那么存在常数 c_2，使得对任意 $z\in B_2$ 有

$$\frac{(1-|z|)^{c_2-\frac{3}{2}}}{(1+|z|)^{c_2+\frac{3}{2}}}\leqslant|\det f'(z)|\leqslant\frac{(1+|z|)^{c_2-\frac{3}{2}}}{(1-|z|)^{c_2+\frac{3}{2}}},$$

其中$\frac{3}{2}\leqslant c_2<1.761$.

接着刘太顺 [Liu2] 把这结果推广到 B_n，得到

定理 2.7.1 设 f: $B_n\to\mathbf{C}^n$ 是凸映射，且 $\det f'(0)=1$，那么存在常数 c_n，使得对任意 $z\in B_n$ 有

$$\frac{(1-|z|)^{c_n-\frac{n+1}{2}}}{(1+|z|)^{c_n+\frac{n+1}{2}}}\leqslant|\det f'(z)|\leqslant\frac{(1+|z|)^{c_n-\frac{n+1}{2}}}{(1-|z|)^{c_n+\frac{n+1}{2}}},$$

其中$\frac{n+1}{2}\leqslant c_n\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ (n-1)$.

下面我们将给出这个定理的证明. 为此，先证明

引理 2.7.2 设 $\varphi(z)=\frac{a-zA}{1-z\bar{a}'}$，其中 $a,z\in B_n$，$A=sI+\frac{\bar{a}'a}{1+s}$，$s^2=1-|a|^2$. 如果记 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$，那么

(i) $\varphi'(0)=s\left(\frac{a'\bar{a}}{1+s}-I\right)$；

(ii) $\frac{\partial^2\varphi_k(0)}{\partial z'\partial z}=s\left(\frac{2a_k\bar{a}'\bar{a}}{1+s}-\bar{a}'e_k-e_k'\bar{a}\right)$，$k=1,\ \cdots,\ n$.

证 因为 φ 是 B_n 中的全纯映射，把它的每个分量在 $z=0$ 处展开成 Taylor 级数，然后再写成向量形式，得

$$\varphi(z)=a+z(\varphi'(0))'+\frac{1}{2}\left(z\frac{\partial^2\varphi_1(0)}{\partial z'\partial z}z',\cdots,z\frac{\partial^2\varphi_n(0)}{\partial z'\partial z}z'\right)+\cdots\qquad(3)$$

这里$(\varphi'(0))'$，记方阵 $\varphi'(0)$ 的转置. 另一方面，注意到 $aA=a$，φ可以写成 $\varphi(z)=\frac{a-z}{1-z\bar{a}'}A$，把$\frac{1}{1-z\bar{a}'}$展开成幂级数得

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=(a-z)A\sum_{k=0}^{\infty}(z\bar{a}')^k\\&=(a-z)\left(sI+\frac{\bar{a}'a}{1+s}\right)(1+z\bar{a}'+(z\bar{a}')^2+\cdots)\\&=\left(a-sz-\frac{z\bar{a}'a}{1+s}\right)(1+z\bar{a}'+(z\bar{a}')^2+\cdots)\end{aligned}$$

$$=a-sz-z\frac{\bar{a}'a}{1+s}+az\bar{a}'-szz\bar{a}'-\frac{z\bar{a}'az\bar{a}'}{1+s}$$
$$+az\bar{a}'z\bar{a}'+\cdots$$
$$=a+sz\left(\frac{\bar{a}'a}{1+s}-I\right)+\cdots$$
式中关于 z 的二次项是

$$-szz\bar{a}'-\frac{1}{1+s}z\bar{a}'az\bar{a}'+az\bar{a}'z\bar{a}'$$

$$=-sz\bar{a}z'+\frac{s}{1+s}z\bar{a}'a\bar{a}z',$$

其中第二项可以写成

$$\frac{s}{1+s}z\ (\bar{a}'\bar{a}a_1,\ \cdots,\ \bar{a}'\bar{a}a_n)\ z'.$$

由于 $z(\bar{a}'e_k+e'_k\bar{a})z'=2z_k\bar{a}z'$，所以

$$2z\bar{a}z'=z\ (\bar{a}'e_1+e'_1\bar{a},\ \cdots,\ \bar{a}'e_n+e'_n\bar{a})\ z'.$$

于是 z 的二次项为

$$\frac{1}{2}\left\{z\left(\frac{2sa_1\bar{a}'\bar{a}}{1+s}-s\bar{a}'e_1-se'_1\bar{a}\right)z',\ \cdots,\right.$$
$$\left.z\left(\frac{2sa_n\bar{a}'\bar{a}}{1+s}-s\bar{a}'e_n-se'_n\bar{a}\right)z'\right\}.$$

因而得

$$\varphi(z)=a+sz\left(\frac{\bar{a}'a}{1+s}-I\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left\{z\left(\frac{2sa_1\bar{a}'\bar{a}}{1+s}-s\bar{a}'e_1-se'_1\bar{a}\right)z',\ \cdots,\right.$$
$$\left.z\left(\frac{2sa_n\bar{a}'\bar{a}}{1+s}-s\bar{a}'e_n-se'_n\bar{a}\right)z'\right\}+\cdots$$

把它和（3）比较，即得所要证的等式. □

实际上，引理 2.7.2 的第一个等式已在定理 2.3.9 中证明过.

设 $f: B_n\to\mathbf{C}^n$ 是双全纯映射，φ 如引理 2.7.2 所述，它是 B_n 的一个全纯自同构，记 $G(w)=f(\varphi(w))$，则由命题 2.1.3 得 $G'(0)=f'(a)\varphi'(0)$，所以 G 在 $w=0$ 处的 Taylor 展开为

$$G(w)=f(a)+w(\varphi'(0))'(f'(a))'+\cdots$$

把 G 规范化以后所得的映射记为 F，则

$$F(w)=(G(w)-f(a))((f'(a))')^{-1}((\varphi'(0))')^{-1}.$$

下面给出的 $\det f'(\rho z)$的表达式是证明定理 2.7.1 的关键.

引理 2.7.3 设 $f: B_n\to\mathbf{C}^n$ 是双全纯映射，φ 如引理 2.7.2 所述，记 $G(w)=f(\varphi(w))$，G 规范化后所得的映射记为 F. 设 F 的展开式为

$$F(w)=w+(wA^{(1)}w',\cdots,wA^{(n)}w')+\cdots \tag{4}$$

记 $A^{(l)}=(a_{jk}^{(l)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$，$l=1,\cdots,n$，那么

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho}\log\det f'(\rho z)&=\frac{(n+1)\rho|z|^2}{1-\rho^2|z|^2}\\&\quad-\frac{2|z|}{1-\rho^2|z|^2}\sum_{l,j=1}^{n}a_{lj}^{(l)}\frac{z_j}{|z|},\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $0\leqslant\rho\leqslant1$，$z\in B_n$.

证 G 在 $w=0$ 处的展开式为

$$\begin{aligned}G(w)=&f(a)+w(\varphi'(0))'(f'(a))'\\&+\frac{1}{2}\left(w\frac{\partial^2G_1(0)}{\partial w'\partial w}w',\cdots,w\frac{\partial^2G_n(0)}{\partial w'\partial w}w'\right)+\cdots\end{aligned} \tag{6}$$

因面

$$\begin{aligned}F(w)&=(G(w)-f(a))((f'(a))')^{-1}((\varphi'(0))')^{-1}\\&=w+\frac{1}{2}\left(w\frac{\partial^2G_1(0)}{\partial w'\partial w}w',\cdots,w\frac{\partial^2G_n(0)}{\partial w'\partial w}w'\right)\\&\quad\cdot((f'(a))')^{-1}((\varphi'(0))')^{-1}+\cdots\end{aligned}$$

把它和 (4) 比较得

$$\begin{aligned}&\left(w\frac{\partial^2G_1(0)}{\partial w'\partial w}w',\cdots,w\frac{\partial^2G_n(0)}{\partial w'\partial w}w'\right)\\&=(w2A^{(1)}w',\cdots,w2A^{(n)}w')(\varphi'(0))'(f'(a))'.\end{aligned} \tag{7}$$

由引理 2.7.2，$(\varphi'(0))'$ 的第 j 行、第 l 列元素为$\frac{s}{1+s}\bar{a}_ja_l-s\delta_{jl}$，$(f'(a))'$的第 l 行、第 k 列元素为$\frac{\partial f_k(a)}{\partial z_l}$，所以$(\varphi'(0))'(f'(a))'$的

第 j 行、第 k 列元素为

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{s}{1+s}\bar{a}_j a_l - s\delta_{jl}\right)\frac{\partial f_k(a)}{\partial z_l}.$$

从(7)得

$$\frac{\partial^2 G_k(0)}{\partial w'\partial w}=\frac{2s}{1+s}\sum_{j,l=1}^{n}A^{(j)}\bar{a}_j a_l\frac{\partial f_k(a)}{\partial z_l}$$

$$-2s\sum_{j=1}^{n}A^{(j)}\frac{\partial f_k(a)}{\partial z_j}. \tag{8}$$

现在导出$\frac{\partial^2 G_k(0)}{\partial w'\partial w}$的另一表达式. 把 f 在 $z=a$ 处展开成 Taylor 级数:

$$f(z)=f(a)+(z-a)(f'(a))'$$

$$+\frac{1}{2}\left((z-a)\frac{\partial^2 f_1(a)}{\partial z'\partial z}(z-a)',\cdots,\right.$$

$$\left.(z-a)\frac{\partial^2 f_n(a)}{\partial z'\partial z}(z-a)'\right)+\cdots$$

因为

$$\varphi(w)=a+w(\varphi'(0))'+\frac{1}{2}\left(w\frac{\partial^2\varphi_1(0)}{\partial w'\partial w}w',\cdots,\right.$$

$$\left.w\frac{\partial^2\varphi_n(0)}{\partial w'\partial w}w'\right)+\cdots$$

于是

$$G(w)=f(\varphi(w))=f(a)+(\varphi(w)-a)(f'(a))'$$

$$+\frac{1}{2}\left((\varphi(w)-a)\frac{\partial^2 f_1(a)}{\partial z'\partial z}(\varphi(w)-a)',\cdots,\right.$$

$$\left.(\varphi(w)-a)\frac{\partial^2 f_n(a)}{\partial z'\partial z}(\varphi(w)-a)'\right)+\cdots$$

$$=f(a)+w(\varphi'(0))'(f'(a))'$$

$$+\frac{1}{2}\left(w\frac{\partial^2\varphi_1(0)}{\partial w'\partial w}w',\cdots,\right.$$

$$\left.w\frac{\partial^2\varphi_n(0)}{\partial w'\partial w}w'\right)(f'(a))'$$

$$+\frac{1}{2}\Big(w(\varphi'(0))'\frac{\partial^2 f_1(a)}{\partial z'\partial z}\varphi'(0)w',\cdots,$$

$$w(\varphi'(0))'\frac{\partial^2 f_n(a)}{\partial z'\partial z}\varphi'(0)w'\Big)+\cdots.$$

与（6）比较，即得

$$\frac{\partial^2 G_k(0)}{\partial w'\partial w}=(\varphi'(0))'\frac{\partial^2 f_k(a)}{\partial z'\partial z}\varphi'(0)$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi_l(0)}{\partial w'\partial w}\frac{\partial f_k(a)}{\partial z_l}. \tag{9}$$

再比较(8)与(9)得

$$(\varphi'(0))'\frac{\partial^2 f_k(a)}{\partial z'\partial z}\varphi'(0)=\frac{2s}{1+s}\sum_{j,l=1}^{n}A^{(j)}\bar{a}_j a_l\frac{\partial f_k(a)}{\partial z_l}$$

$$-2s\sum_{l=1}^{n}A^{(l)}\frac{\partial f_k(a)}{\partial z_l}$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi_l(0)}{\partial w'\partial w}\frac{\partial f_k(a)}{\partial z_l}.$$

如果记

$$B^{(l)}=\frac{2s}{1+s}a_l\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_j((\varphi'(0))')^{-1}A^{(j)}(\varphi'(0))^{-1}$$

$$-2s((\varphi'(0))')^{-1}A^{(l)}(\varphi'(0))^{-1}$$

$$-((\varphi'(0))')^{-1}\frac{\partial^2\varphi_l(0)}{\partial w'\partial w}(\varphi'(0))^{-1}, \tag{10}$$

那么

$$\frac{\partial^2 f_k(a)}{\partial z'\partial z}=\sum_{l=1}^{n}B^{(l)}\frac{\partial f_k(a)}{\partial z_l}.$$

记 $B^{(l)}$的第 j 行、第 k 列元素为 $b_{jk}^{(l)}$，从上式可得

$$\frac{\partial^2 f_i(a)}{\partial z_j\partial z_k}=\sum_{l=1}^{n}b_{jk}^{(l)}\frac{\partial f_i(a)}{\partial z_l}. \tag{11}$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\log\det f'(a)=\frac{1}{\det f'(a)}\quad\frac{\partial\det f'(a)}{\partial z_k}, \tag{12}$$

而

$$\frac{\partial \det f'(a)}{\partial z_k}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f_1(a)}{\partial z_1\partial z_k} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial z_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^2 f_n(a)}{\partial z_1\partial z_k} & \frac{\partial f_n(a)}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial z_n}\end{vmatrix}+\cdots$$

$$+\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1(a)}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_1(a)}{\partial z_n\partial z_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_n(a)}{\partial z_n\partial z_k}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(a)}{\partial z_1\partial z_k}J_{i1}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(a)}{\partial z_n\partial z_k}J_{in}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(a)}{\partial z_j\partial z_k}J_{ij},$$

这里 J_{ij}是 $f'(a)$ 中$\frac{\partial f_i(a)}{\partial z_j}$的代数余子式. 固定 $z\in B_n$, 让 $\rho\in[0,1]$, 对 $\log\det f'(\rho z)$ 中的 ρ 求导数:

$$\frac{d}{d\rho}\log\det f'(\rho z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \log\det f'(\rho z)}{\partial z_k}z_k$$

$$=\frac{1}{\det f'(\rho z)}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\rho z)}{\partial z_j\partial z_k}J_{ij}z_k$$

$$=\frac{1}{\det f'(\rho z)}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}b_{jk}^{(l)}\frac{\partial f_i(\rho z)}{\partial z_l}J_{ij}z_k,$$

这里我们已经利用了等式(11)和(12). 注意到

$$\sum_{i=1}^{n}J_{ij}\frac{\partial f_i(\rho z)}{\partial z_l}=\delta_{jl}\det f'(\rho z),$$

上式可写成

$$\frac{d}{d\rho}\log\det f'(\rho z)=\sum_{j,k,l=1}^{n}z_k\delta_{jl}b_{jk}^{(l)}$$

$$=\sum_{l,k=1}^{n} b_{lk}^{(l)} z_k.$$

容易看出 $\sum_{k=1}^{n} b_{lk}^{(l)} z_k$ 是列向量 $B^{(l)} z'$ 的第 l 个元素，所以

$$\frac{d}{d\rho}\log\det f'(\rho z)=\sum_{l=1}^{n}(B^{(l)}z')_l. \tag{13}$$

现在问题归结为计算 $(B^{(l)}z')_l$，把 $B^{(l)}$ 的表达式(10)写为

$$B^{(l)}=X^{(l)}+Y^{(l)}+Z^{(l)},$$

其中

$$X^{(l)}=\frac{2s}{1+s}a_l\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_j((\varphi'(0))')^{-1}A^{(j)}(\varphi'(0))^{-1},$$

$$Y^{(l)}=-2s((\varphi'(0))')^{-1}A^{(l)}(\varphi'(0))^{-1},$$

$$Z^{(l)}=-((\varphi'(0))')^{-1}\frac{\partial^2\varphi_l(0)}{\partial w'\,\partial w}(\varphi'(0))^{-1},$$

这里 $a=\rho z, s^2=1-\rho^2|z|^2$. 因为

$$(\varphi'(0))^{-1}=-\frac{1}{s}\left(\frac{a'\bar{a}}{s(s+1)}+I\right)=-\frac{1}{s}\left(\frac{\rho^2 z'\bar{z}}{s(s+1)}+I\right),$$

所以

$$(\varphi'(0))^{-1}z'=-\frac{1}{s}\left(\frac{\rho^2|z|^2 z'}{s(s+1)}+z'\right)$$

$$=-\frac{1}{s}\left(\frac{(1-s^2)z'}{s(s+1)}+z'\right)=-\frac{z'}{s^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi_l(0)}{\partial w'\,\partial w}(\varphi'(0))^{-1}z'=-s\left(\frac{2\rho^3 z_l\bar{z}'\bar{z}}{1+s}-\rho e'_l\bar{z}-\rho\bar{z}'e_l\right)\frac{z'}{s^2}$$

$$=-\frac{1}{s}\left(\frac{2\rho^3 z_l\bar{z}'|z|^2}{1+s}-\rho e'_l|z|^2-\rho\bar{z}'z_l\right),$$

于是

$$Z^{(l)}z'=-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\rho^2\bar{z}'z}{s(1+s)}+I\right)$$

$$\cdot\left(\frac{2\rho^3 z_l\bar{z}'|z|^2}{1+s}-\rho e'_l|z|^2-\rho\bar{z}'z_l\right)$$

$$=-\frac{1}{s^2}\left\{\frac{2\rho^5|z|^4 z_l\bar{z}'}{s(1+s)^2}+\frac{2\rho^3 z_l\bar{z}'|z|^2}{1+s}\right.$$

$$\left.-\frac{2\rho^3|z|^2 z_l\bar{z}'}{s(1+s)}-\rho e_l'|z|^2-\rho\bar{z}' z_l\right\},$$

由于

$$\frac{2\rho^5|z|^4 z_l\bar{z}'}{s(1+s)^2}=\frac{2\rho^3|z|^2(1-s^2)z_l\bar{z}'}{s(1+s)^2}$$

$$=\frac{2\rho^3|z|^2(1-s)z_l\bar{z}'}{s(1+s)},$$

所以 $Z^{(l)}z'=\frac{1}{s^2}\ (\rho e_l'|z|^2+\rho\bar{z}' z_l)$,因而

$$(Z^{(l)}z')_l=\frac{\rho}{s^2}\ (|z|^2+|z_l|^2). \tag{14}$$

因为 $A^{(l)}=(a_{jk}^{(l)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$, 所以

$$A^{(l)}\ (\varphi'(0))^{-1}z'=-\frac{1}{s^2}A^{(l)}z'$$

$$=-\frac{1}{s^2}\left(\sum_{k=1}^n a_{1k}^{(l)}z_k,\ \cdots,\ \sum_{k=1}^n a_{nk}^{(l)}z_k\right)',$$

$$Y^{(l)}z'=-\frac{2}{s^2}\left(\frac{\rho^2\bar{z}'z}{s(1+s)}+I\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{k=1}^n a_{1k}^{(l)}z_k,\ \cdots,\ \sum_{k=1}^n a_{nk}^{(l)}z_k\right)',$$

$$(Y^{(l)}z')_l=-\frac{2}{s^2}\left\{\frac{\rho^2}{s(1+s)}\bar{z}_l\sum_{j,k=1}^n a_{jk}^{(l)}z_jz_k+\sum_{j=1}^n a_{lj}^{(l)}z_j\right\}.$$

若记

$$Q^{(l)}=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(l)}z_iz_j,\ \ P_l^{(l)}=\sum_{j=1}^n a_{lj}^{(l)}z_j,$$

那么

$$(Y^{(l)}z')_l=-\frac{2}{s^2}\left(\frac{\rho^2\bar{z}_l}{s(1+s)}Q^{(l)}+P_l^{(l)}\right). \tag{15}$$

由于

$((\varphi'(0))')^{-1}A^{(l)}\ (\varphi'(0))^{-1}z'$

$$=\frac{1}{s^3}\left\{\frac{\rho^2\bar{z}'Q^{(l)}}{s(1+s)}+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}^{(j)}z_k,\ \cdots,\ \sum_{k=1}^{n}a_{nk}^{(j)}z_k\right)'\right\},$$

所以

$$(X^{(l)}z')_l=\frac{2\rho^4|z_l|^2}{(1+s)^2s^3}\sum_{j=1}^{n}\bar{z}_jQ^{(j)}+\frac{2\rho^2z_l}{(1+s)s^2}\sum_{j,k=1}^{n}\bar{z}_jz_ka_{lk}^{(j)}. \quad (16)$$

综合 (14), (15) 和 (16) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}(B^{(l)}z')_l &= \sum_{l=1}^{n}(X^{(l)}z')_l+\sum_{l=1}^{n}(Y^{(l)}z')_l+\sum_{l=1}^{n}(Z^{(l)}z')_l\\ &=\frac{2\rho^4|z|^2}{(1+s)^2s^3}\sum_{j=1}^{n}Q^{(j)}\bar{z}_j+\frac{2\rho^2}{(1+s)s^2}\sum_{j=1}^{n}Q^{(j)}\bar{z}_j\\ &\quad-\frac{2\rho^2}{s^3(1+s)}\sum_{l=1}^{n}Q^{(l)}\bar{z}_l-\frac{2}{s^2}\sum_{l=1}^{n}P_l^{(l)}\\ &\quad+\frac{\rho}{s^2}(n+1)|z|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

注意到

$$\frac{2\rho^4|z|^2}{(1+s)^2s^3}=\frac{2\rho^2(1-s^2)}{(1+s)^2s^3}=\frac{2\rho^2}{s^3(1+s)}-\frac{2\rho^2}{s^2(1+s)},$$

$$\sum_{l=1}^{n}P_l^{(l)}=\sum_{l,j=1}^{n}a_{lj}^{(l)}z_j,$$

(17) 可写成

$$\sum_{l=1}^{n}(B^{(l)}z')_l=\frac{(n+1)\rho|z|^2}{1-\rho^2|z|^2}-\frac{2}{1-\rho^2|z|^2}\sum_{l,j=1}^{n}a_{lj}^{(l)}z_j.$$

代入 (13) 就得到所要证的等式 (5). □

2.7.2 规范化凸映射展开式系数的估计

现在给出引理 2.7.3 的等式(5)中系数 $a_{lj}^{(l)}$ 的估计.

引理 2.7.4 设

$$f(z)=z+(zA^{(1)}z',\ \cdots,\ zA^{(n)}z')+\cdots$$

是 B_n 到 $\mathbf{C}^n$ 的规范化的凸映射，其中 $A^{(i)}$ $(i=1,\ \cdots,\ n)$ 是 n 阶对称方阵，其元素用 $a_{jk}^{(i)}$ 表示，那么

(i) $|a_{ii}^{(i)}|\leqslant 1$, $i=1$, $\cdots$, n;

(ii) $|a_{jj}^{(i)}|\leqslant\frac{1}{2}$, i, $j=1$, $\cdots$, n, $i\neq j$;

(iii) $|a_{ij}^{(i)}|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, i, $j=1$, $\cdots$, n, $i\neq j$;

(iv) $|a_{jk}^{(i)}|\leqslant\frac{1}{2}$, i, j, $k=1$, $\cdots$, n, $i\neq j$, $j\neq k$, $i\neq k$.

证 取ζ, $\eta\in B_n$, 使得$|\zeta|^2+|\eta|^2<1$, 且$\mathrm{Re}\zeta\bar{\eta}'=0$, 那么

$$|\zeta+\eta|^2=|\zeta|^2+|\eta|^2+2\mathrm{Re}(\zeta\bar{\eta}')=|\zeta|^2+|\eta|^2<1,$$

即$\zeta+\eta\in B_n$, 同理$\zeta-\eta\in B_n$. 因为f是凸的，所以

$$\frac{1}{2}\{f(\zeta+\eta)+f(\zeta-\eta)\}\in f(B_n),$$

如果记 $g(\zeta,\eta)=f^{-1}(\frac{1}{2}(f(\zeta+\eta)+f(\zeta-\eta)))$,则$g(\zeta,\eta)\in B_n$,

且 $f(g(\zeta,\eta))=\frac{1}{2}(f(\zeta+\eta)+f(\zeta-\eta))$. 由于

$$f(\zeta+\eta)=\zeta+\eta+((\zeta+\eta)A^{(1)}(\zeta+\eta)',\cdots,(\zeta+\eta)A^{(n)}(\zeta+\eta)')+\cdots$$

$$f(\zeta-\eta)=\zeta-\eta+((\zeta-\eta)A^{(1)}(\zeta-\eta)',\cdots,(\zeta-\eta)A^{(n)}(\zeta-\eta)')+\cdots$$

所以

$$\begin{aligned}f(g(\zeta,\eta))&=\frac{1}{2}(f(\zeta+\eta)+f(\zeta-\eta))\\&=\zeta+(\zeta A^{(1)}\zeta',\cdots,\zeta A^{(n)}\zeta')\\&\quad+(\eta A^{(1)}\eta',\cdots,\eta A^{(n)}\eta')+\cdots.\end{aligned}$$

另一方面，

$$f(g(\zeta,\eta))=g(\zeta,\eta)+(g(\zeta,\eta)A^{(1)}g(\zeta,\eta)',\cdots,g(\zeta,\eta)A^{(n)}g(\zeta,\eta)')+\cdots$$

两式比较得

$$g(\zeta,\eta)=\zeta+(\zeta A^{(1)}\zeta',\cdots,\zeta A^{(n)}\zeta')+(\eta A^{(1)}\eta',\cdots,\eta A^{(n)}\eta')+\cdots$$

从 $g(\zeta,\eta)\in B_n$ 便得

$$
\begin{aligned}
&|\zeta+(\zeta A^{(1)}\zeta',\ \cdots,\ \zeta A^{(n)}\zeta')\\
&+(\eta A^{(1)}\eta',\ \cdots,\ \eta A^{(n)}\eta')+\cdots|<1, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

今在（18）中取 $\zeta=0$，$\eta=re^{i\theta}e_k$，得

$$r^2|(a_{kk}^{(1)}e^{2i\theta},\ \cdots,\ a_{kk}^{(n)}e^{2i\theta})+\cdots|<1,$$

让 $r\to 1$ 得

$$|(a_{kk}^{(1)}e^{2i\theta},\ \cdots,\ a_{kk}^{(n)}e^{2i\theta})+\cdots|\leqslant 1,$$

以后各项中都出现 $e^{mi\theta}$，其中 $m>2$. 上述向量的第 k 个分量是 $a_{kk}^{(k)}e^{2i\theta}+\cdots$，所以 $|a_{kk}^{(k)}e^{2i\theta}+\cdots|\leqslant 1$.

于是

$$
\begin{aligned}
|a_{kk}^{(k)}|&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a_{kk}^{(k)}e^{2i\theta}+\cdots)\ e^{-2i\theta}d\theta\right|\\
&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|a_{kk}^{(k)}e^{2i\theta}+\cdots|d\theta\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

这就证明了（i）.

在（18）中取 $\zeta=e^{2i\theta}\zeta_j e_j$，$\eta=e^{i\theta}\eta_k e_k$，$j\neq k$，且 $|\zeta_j|^2+|\eta_k|^2=1$. 于是取（18）向量中的第 j 个分量得

$$|e^{2i\theta}\zeta_j+e^{4i\theta}\zeta_j^2a_{jj}^{(j)}+e^{2i\theta}\eta_k^2a_{kk}^{(j)}+\cdots|\leqslant 1,$$

由此得

$$
\begin{aligned}
&|\zeta_j+a_{kk}^{(j)}\eta_k^2|\\
&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{2i\theta}\zeta_j+e^{4i\theta}\zeta_j^2a_{jj}^{(j)}+e^{2i\theta}\eta_k^2a_{kk}^{(j)}+\cdots)\ e^{-2i\theta}d\theta\right|\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

适当选取 ζ_j，η_k 的辐角可使

$$|a_{kk}^{(j)}||\eta_k|^2<1-|\zeta_j|=\frac{|\eta_k|^2}{1+|\zeta_j|},$$

让 η_k，$\zeta_j\to 1$，即得 $|a_{kk}^{(j)}|\leqslant\dfrac{1}{2}$，这就是（ii）.

在（18）中取 $\zeta=e^{i\theta}\zeta_j e_j$，$\eta=e^{i\theta}\eta_j e_j+\eta_k e_k$，使得 $j\neq k$，$|\zeta_j|^2+|\eta_j|^2+|\eta_k|^2=1$，且 $\mathrm{Re}\zeta_j\bar{\eta}_j=0$. 对这组 ζ，η，不等式（18）成立，因而有

$$|\zeta_j e^{i\theta}+\zeta_j^2 e^{2i\theta} a_{jj}^{(j)}+e^{2i\theta}\eta_j^2 a_{jj}^{(j)}$$
$$+\eta_k^2 a_{kk}^{(j)}+2e^{i\theta}\eta_j\eta_k a_{jk}^{(j)}+\cdots|\leqslant 1.$$

所以

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ (\zeta_j e^{i\theta}+\zeta_j^2 e^{2i\theta} a_{jj}^{(j)}+e^{2i\theta}\eta_j^2 a_{jj}^{(j)}\right.$$
$$\left.+\eta_k^2 a_{kk}^{(j)}+2e^{i\theta}\eta_j\eta_k a_{jk}^{(j)}+\cdots)\ e^{-i\theta}d\theta\right|\leqslant 1 \tag{19}$$

上面积分被积函数的圆括弧中，凡有因子 $e^{i\theta}$ 的项积分后将被保留. 因为我们取的是 $g(\zeta,\eta)$ 的第 j 个分量，由于 ζ，η 的取法，凡 ζ 的第 j 个坐标与 η 的第 k 个坐标相乘都会产生带 $e^{i\theta}$ 的项，因而（19）左端的积分值为

$$\zeta_j+2\eta_j\eta_k a_{jk}^{(j)}+\lambda\zeta_j\eta_k^2+o(|\eta|^2),$$

这里 λ 是相应项的系数. 于是从（19）得

$$|\zeta_j+2\eta_j\eta_k a_{jk}^{(j)}+\lambda\zeta_j\eta_k^2+o(|\eta|^2)|\leqslant 1.$$

若把上述不等式左端的复数记为 τ，则 $|\tau|\leqslant 1$. 注意到 $|\zeta_j|<1$，因而得 $\left|\dfrac{\zeta_j-\tau}{1-\tau\bar{\zeta}_j}\right|\leqslant 1$，即

$$\frac{|2\eta_j\eta_k a_{jk}^{(j)}+\lambda\zeta_j\eta_k^2+o(|\eta|^2)|}{|1-|\zeta_j|^2-2\eta_j\eta_k\bar{\zeta}_j a_{jk}^{(j)}-\lambda|\zeta|^2\eta_k^2+o(|\eta|^2)|}\leqslant 1,$$

把上式分子分母同除以 $|\eta|^2$，并记 $\alpha_j=\dfrac{\eta_j}{|\eta|}$，$\beta_j=\dfrac{\zeta_j}{|\zeta|}$，那么 $|\alpha_j|^2+|\alpha_k|^2=1$，$|\beta_j|=1$，上式可写为

$$\frac{|2\alpha_j\alpha_k a_{jk}^{(j)}+\lambda\beta_j|\zeta|\alpha_k^2+o(1)|}{\left|\dfrac{1-|\zeta_j|^2}{|\eta|^2}-2\alpha_j\alpha_k\bar{\beta}_j|\zeta|a_{jk}^{(j)}-\lambda|\zeta|^2\alpha_k^2+o\ (1)\right|}\leqslant 1.$$

注意到 $|\eta|^2+|\zeta_j|^2=|\eta_j|^2+|\eta_k|^2+|\zeta_j|^2=1$，所以当 $|\eta|\to 0$ 时，$|\zeta_j|=|\zeta|\to 1$. 故在上式中命 $|\eta|\to 0$，得

$$\frac{|2\alpha_j\alpha_k a_{jk}^{(j)}+\lambda\beta_j\alpha_k^2|}{|1-2\alpha_j\alpha_k\bar{\beta}_j\bar{a}_{jk}-\lambda\alpha_k^2|}\leqslant 1 \tag{20}$$

对满足 $|\alpha_j|^2+|\alpha_k|^2=1$，$|\beta_j|=1$，$\mathrm{Re}\,\alpha_j\bar{\beta}_j=0$ 的 α_j，α_k，β_j 成立. 在

(20) 中命 $\alpha_j=0$，则 $|\alpha_k|=1$，适当选取 α_k 的辐角便可得 $\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}\leqslant 1$，即 $|\lambda|\leqslant\frac{1}{2}$. 从 (20) 又得

$$\frac{2|\alpha_j||\alpha_k||a_{jk}^{(l)}|-|\lambda||\alpha_k|^2}{|1-2\alpha_j\alpha_k\overline{\beta}_j a_{jk}^{(l)}|+|\lambda||\alpha_k|^2}\leqslant 1,$$

适当选取 α_k 的辐角可得

$$\frac{2|\alpha_j||\alpha_k||a_{jk}^{(l)}|-|\lambda||\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_j||\alpha_k||a_{jk}^{(l)}|+|\lambda||\alpha_k|^2}\leqslant 1.$$

由此得

$$|a_{jk}^{(l)}|\leqslant\frac{1+2|\lambda||\alpha_k|^2}{4|\alpha_j||\alpha_k|}\leqslant\frac{1+|\alpha_k|^2}{4|\alpha_j||\alpha_k|},$$

在 $|\alpha_j|^2+|\alpha_k|^2=1$ 的条件下，上式右端当 $|\alpha_k|=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，因而得 $|a_{jk}^{(l)}|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，这就是 (iii).

最后证明 (iv)，在 (18) 中取 $\zeta=e^{2i\theta}e^{i\varphi}\zeta_l e_l$，$\eta=e^{i\theta}e^{i\varphi}\eta_j e_j+e^{i\theta}\eta_k e_k$，使得 $|\zeta_l|^2+|\eta_j|^2+|\eta_k|^2=1$，且 $l\neq j$，$j\neq k$，$k\neq l$. 于是

$$\begin{aligned}&|\zeta_l e^{2i\theta}e^{i\varphi}+a_{jj}^{(l)}e^{2i\theta}e^{2i\varphi}\eta_j^2\\&+2a_{jk}^{(l)}e^{2i\theta}e^{i\varphi}\eta_j\eta_k+a_{kk}^{(l)}\eta_k^2e^{2i\theta}+\cdots|\leqslant 1,\end{aligned}$$

用和上面一样的方法可得

$$|\zeta_l e^{i\varphi}+a_{jj}^{(l)}e^{2i\varphi}\eta_j^2+2a_{jk}^{(l)}e^{i\varphi}\eta_j\eta_k+a_{kk}^{(l)}\eta_k^2+\cdots|\leqslant 1,$$

再用一次同样的方法得

$$|\zeta_l+2a_{jk}^{(l)}\eta_j\eta_k|\leqslant 1.$$

让 $\eta_k=\eta_j$，并适当选取其辐角，得

$$|\zeta_l|+2|a_{jk}^{(l)}||\eta_j|^2\leqslant 1,$$

即

$$|a_{jk}^{(l)}|\leqslant\frac{1-|\zeta_l|}{2|\eta_j|^2}=\frac{1-|\zeta_l|^2}{2|\eta_j|^2}\frac{1}{1+|\zeta_l|}=\frac{1}{1+|\zeta_l|}.$$

让 $|\zeta_l|\to 1$，即得 $|a_{jk}^{(l)}|\leqslant\frac{1}{2}$. □

引理 2.7.5 设 K_n 是 B_n 上规范化的凸映射的全体，对于任意 $f\in K_n$，设其展开式为

$$f(z)=z+(zA^{(1)}z',\ \cdots,\ zA^{(n)}z')+\cdots$$

其中 $A^{(l)}=(a_{jk}^{(l)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. 命

$$C_n=\sup_{f\in K_n}\left|\sum_{l=1}^{n}a_{l1}^{(l)}\right|, \tag{21}$$

那么

$$\frac{n+1}{2}\leqslant C_n\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}(n-1). \tag{22}$$

证 由引理 2.7.4 的 (i) 和 (iii)，(22) 右端的不等式是明显的. 为了证明 (22) 左端的不等式，注意 B_n 的自同构

$$\varphi_a(z)=\frac{a-z}{1-z\bar{a}'}A,$$

它当然是 B_n 上的凸映射，把它规范化后所得的映射记为 Φ_a，即

$$\Phi_a(z)=(\varphi_a(z)-a)((\varphi_a'(0))')^{-1},$$

则 $\Phi_a\in K_n$. 因为

$$\varphi_a(z)-a=\frac{1}{1-z\bar{a}'}\left(-sz+\frac{saz\bar{a}'}{1+s}\right),$$

$$((\varphi_a'(0))')^{-1}=\frac{-1}{s}\left(\frac{\bar{a}'a}{s(1+s)}+I\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\Phi_a(z)&=\frac{1}{1-z\bar{a}'}\left(\frac{z\bar{a}'a}{s(1+s)}-\frac{az\bar{a}'\bar{a}'a}{s(1+s)^2}+z-\frac{az\bar{a}'}{1+s}\right)\\&=\frac{z}{1-z\bar{a}'},\end{aligned}$$

让 $a\to e_1$，则 $\Phi_a(z)\to\frac{z}{1-z_1}$. 因为 K_n 是紧的，所以 $f(z)=\frac{z}{1-z_1}\in K_n$. 若记 $f=(f_1,\ \cdots,\ f_n)$，则

$$f_1(z)=\frac{z_1}{1-z_1}=z_1+z_1^2+z_1^3+\cdots$$

$$f_2(z)=\frac{z_2}{1-z_1}=z_2+z_1z_2+z_1^2z_2+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(z)=\frac{z_n}{1-z_1}=z_n+z_1z_n+z_1^2z_n+\cdots$$

f 的二次项是

$$(z_1^2,\ z_1z_2,\ \cdots,\ z_1z_n)\ =\ (zA^{(1)}z',\ \cdots,\ zA^{(n)}z').$$

因而

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad A^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\ \cdots,$$

$$A^{(n)}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{2} & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

即 $a_{11}^{(1)}=1,\ a_{21}^{(2)}=\frac{1}{2},\ \cdots,\ a_{n1}^{(n)}=\frac{1}{2}$，所以

$$\sum_{l=1}^{n}a_{l1}^{(l)}=1+\frac{1}{2}\ (n-1)\ =\frac{n+1}{2}.$$

由此即知（22）左端成立. □

引理 2.7.6 设

$$f(z)\ =z+\ (zA^{(1)}z',\ \cdots,\ zA^{(n)}z')\ +\cdots$$

是 B_n 上的规范化的凸映射，$A^{(l)}=\ (a_{jk}^{(l)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$，那么对任意 $z\in B_n$，有

$$\left|\sum_{l,j=1}^{n} a_{lj}^{(l)}\frac{z_j}{|z|}\right|\leqslant C_n, \tag{23}$$

这里 C_n 如（21）所定义.

证 因为 $\frac{z}{|z|}$ 为单位向量，故可取酉方阵 $U=(u_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$，使其第一行为 $\frac{\bar{z}}{|z|}$. 命 $z=wU$，则

$$\begin{aligned}f(wU)\overline{U}'&=w+(wUA^{(1)}U'w',\cdots,wUA^{(n)}U'w')\overline{U}'+\cdots\\&=w+(w\widetilde{A}^{(1)}w',\cdots,w\widetilde{A}^{(n)}w')+\cdots\end{aligned}$$

记 $\widetilde{A}^{(l)}=(\tilde{a}_{jk}^{(l)})$，我们来确定 $\widetilde{A}^{(l)}$. 因为

$$wUA^{(m)}U'w'=\sum_{i,l=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}w_iu_{ij}a_{jk}^{(m)}\overline{u}_{lk}w_l,$$

所以 $(wUA^{(1)}U'w',\cdots,wUA^{(n)}U'w')\overline{U}'$ 的第 s 个元素为

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{n}\sum_{i,l=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}w_iu_{ij}a_{jk}^{(m)}\overline{u}_{lk}w_l\overline{u}_{sm}\\&=\sum_{i,l=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}w_iu_{ij}\Big(\sum_{m=1}^{n}a_{jk}^{(m)}\overline{u}_{sm}\Big)\overline{u}_{lk}w_l.\end{aligned}$$

由此可知 $\widetilde{A}^{(s)}$ 的 (i,l) 元素为

$$\tilde{a}_{il}^{(s)}=\sum_{j,k=1}^{n}u_{ij}\Big(\sum_{m=1}^{n}a_{jk}^{(m)}\overline{u}_{sm}\Big)\overline{u}_{lk}.$$

因而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_{i1}^{(i)}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}u_{ij}\Big(\sum_{m=1}^{n}a_{jk}^{(m)}\overline{u}_{im}\Big)\overline{u}_{1k}\\&=\sum_{m,j,k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}u_{ij}\overline{u}_{im}\Big)a_{jk}^{(m)}\overline{u}_{1k}\\&=\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}^{(j)}\overline{u}_{1k}=\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}^{(j)}\frac{z_k}{|z|}.\end{aligned}$$

因为 $f(wU)\overline{U}'\in K_n$，由 C_n 的定义即知（23）成立. □

2.7.3 定理 2.7.1 的证明

定理 2.7.1 的证明 在引理 2.7.3 的等式（5）中，对 ρ 从 0 到 1 积分，注意到 $\det f'(0)=1$，便得

$$\log \det f'(z) = (n+1)|z|^2\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{1-\rho^2|z|^2}$$

$$-\int_0^1 \frac{2|z|}{1-\rho^2|z|^2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(i)} \frac{z_j}{|z|}\right)d\rho. \qquad (24)$$

因为

$$(n+1)|z|^2\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{1-\rho^2|z|^2} = -\frac{n+1}{2}\log(1-|z|^2),$$

$$\int_0^1 \frac{2|z|}{1-\rho^2|z|^2}d\rho = \log\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

并利用引理 2.7.6 得

$$|\log\{(1-|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}\det f'(z)\}| \leqslant C_n \log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

由此即得

$$|\det f'(z)| \leqslant \frac{(1+|z|)^{C_n-\frac{n+1}{2}}}{(1-|z|)^{C_n+\frac{n+1}{2}}}.$$

这就证明了定理 2.7.1 的右端的不等式. 从 (24) 可以直接得到

$$\log \det f'(z) = -\frac{n+1}{2}\log(1-|z|^2)$$

$$-\int_0^1 \frac{2|z|}{1-\rho^2|z|^2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(i)} \frac{z_j}{|z|}\right)d\rho,$$

或者

$$\det f'(z) = (1-|z|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\int_0^1 \frac{2|z|}{1-\rho^2|z|^2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(i)} \frac{z_j}{|z|}\right)d\rho\right\},$$

所以

$$|\det f'(z)| \geqslant (1-|z|^2)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-C_n \log\frac{1+|z|}{1-|z|}}$$

$$= \frac{(1-|z|)^{C_n-\frac{n+1}{2}}}{(1+|z|)^{C_n+\frac{n+1}{2}}}.$$

定理 2.7.1 证毕. □

龚昇等在 [BFG1] 中猜测，$C_n=\frac{n+1}{2}$，这时相应的偏差定理为

$$\frac{1}{(1+|z|)^{n+1}}\leqslant|\det f'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|)^{n+1}}.$$

这是单位圆盘上凸映射偏差定理的推广，但目前尚未得到证明.

§ 2.8 双全纯映射族的凸性半径

2.8.1 B_n 上规范化双全纯映射族不存在凸性半径

用 S 记单位圆盘 U 上满足条件 $f(0)=0$ 和 $f'(0)=1$ 的双全纯函数 f 的全体. R. Nevanlinna 在 1920 年证明了下列事实：存在 $r_0\in(0,1)$，使得对每个 $f\in S$，$f(r_0U)$都是 $\mathbf{C}$ 上的凸域，而对任何 $r>r_0$，必存在 $g\in S$，使得 $g(rU)$不是凸域，称 r_0 为函数族 S 的凸性半径. 容易证明 [Gol]，$r_0=2-\sqrt{3}$.

多圆柱 U^n 和球 B_n 是单位圆盘在 $\mathbf{C}^n$ 中的两种推广，对于 U^n 和 B_n 上的双全纯映射，是否存在类似于单位圆盘的凸性半径?

设 $f:U^2\to\mathbf{C}^2$ 定义为 $f(z)=(z_1+az_2^2,z_2)$，其中 a 是一复数，$a\neq0$. 容易看出，它是双全纯的，而且 $f(0)=0$，但它显然不能写为

$$f(z)=(g_1(z_1),g_2(z_2))T.$$

由定理 2.5.7，对任意 $r\in(0,1)$，$f(rU^2)$ 都不是凸的. 这说明对多圆柱上的双全纯映射族不存在凸性半径问题.

对于球 B_n 不存在上而这样的例子.

定理 2.8.1 设 $f:B_n\to\mathbf{C}^n$ 是一个双全纯映射 $f(0)=0$，那么存在 $r_f\in(0,1]$，使得 $f(r_fB_n)$ 是欧氏凸域，而对任意 $\rho>r_f$，$f(\rho B_n)$ 不是欧氏凸域.

证 因为 f 是双全纯映射，对任意 $z\in B_n$，$\det\left(\frac{df}{dz}\right)\neq0$. 故在

$|z| \leqslant \delta$ 中，$\min \left| \det\left(\frac{df}{dz}\right) \right| > 0$. 在矩阵 $\frac{df}{dz}$ 中，设 $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}$ 的代数余子式为 g_{ij}，那么

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\frac{df}{dz}\right)} \begin{pmatrix} g_{11} \cdots g_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{1n} \cdots g_{nn} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\left| \bar{z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} \frac{d^2 f}{dz^2}\alpha^2 \right| = \left| \left(\det\left(\frac{df}{dz}\right)\right)^{-1} \sum_{j,k,p,q=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial z_p \partial z_q} \alpha_p \alpha_q g_{jk} \bar{z}_k \right|$$

$$\leqslant \left| \det\left(\frac{df}{dz}\right) \right|^{-1} \sum_{j,k,p,q=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_j}{\partial z_p \partial z_q} \right| |g_{jk}| |z_k|.$$

所以当 $z \to 0$ 时，$\bar{z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} \frac{d^2 f}{dz^2}\alpha^2$ 对所有单位向量 α 一致趋于 0. 因此存在 $r \in (0, 1)$，当 $|z| < r$ 时，

$$\left| \bar{z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} \frac{d^2 f}{dz^2}\alpha^2 \right| < 1$$

对所有单位向量 α 成立. 由定理 2.5.13，$f(rB_n)$ 是欧氏凸的. 命

$$r_f = \sup\{r : f(rB_n) \text{ 是欧氏凸域}\}.$$

显然，当 f 是 B_n 上的凸映射时，$r_f = 1$，否则 $r_f < 1$. 而当 $\rho > r_f$ 时，$f(\rho B_n)$ 不是欧氏凸域. □

在上述定理的基础上，我们给出下面的

定义 2.8.2 设 $\mathscr{F}$ 是 B_n 上的双全纯映射族. 如果存在 $r_0 \in (0, 1]$，使得对任意 $f \in \mathscr{F}$，$f(r_0 B_n)$ 是欧氏凸域，而对任意 $\rho > r_0$，存在 $g \in \mathscr{F}$，使得 $g(\rho B_n)$ 不是欧氏凸域，我们就称 r_0 为 $\mathscr{F}$ 的**凸性半径**.

和单复变的情形不同，B_n 上的规范化的双全纯映射族不存在凸性半径.

定理 2.8.3 B_n 上的规范化的双全纯映射族 S 不存在凸性半径.

证 取一列双全纯映射：

$$f^{(k)}(z)=(z_1+kz_2^2,z_2,\cdots,z_n),k=1,\cdots,n.$$

显然 $f^{(k)}\in S$. 记 $z_j=x_j+iy_j$, $\alpha_j=a_j+ib_j$, $j=1$, $\cdots$, n. 通过直接计算可得

$$\operatorname{Re}\left\{\bar{z}\left(\frac{df^{(k)}}{dz}\right)^{-1}\frac{d^2f^{(k)}}{dz^2}(\alpha^2)'\right\}=2k\{x_1(a_2^2-b_2^2)+2a_2b_2y_1\}.$$

固定 $r\in(0,1)$，选择充分大的 k，使得 $r^2-\frac{4}{k^2}>0$. 取 $x_1=0$, $y_1=\frac{2}{k}$, $0<x_2<\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2-\frac{4}{k^2}}$, $y_2=-x_2$, $x_3=y_3=\cdots=0$，那么 $|z|<r$，再取单位向量

$$\alpha=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}(1+i),0,\cdots,0\right),$$

那么 $\operatorname{Re}(\bar{z}\alpha')=0$，但 $\operatorname{Re}\left\{\bar{z}\left(\frac{df^{(k)}}{dz}\right)^{-1}\frac{d^2f^{(k)}}{dz^2}\alpha^2\right\}=2$. 由定理 2.5.13，$f^{(k)}(rB_n)$ 不是欧氏凸域. 这说明不论 r 多么小，总能选择充分大的 k，使得 $f^{(k)}(rB_n)$ 不是欧氏凸域，因此 S 不存在凸性半径. □

但在 S 上再加上适当的限制，可以证明凸性半径存在.

2.8.2 凸性半径存在的条件

定理 2.8.4 设 $\tilde{S}$ 是 B_n 上的规范化的双全纯映射的正规族，那么 $\tilde{S}$ 存在凸性半径.

为了证明这个定理，我们先证明下面的

引理 2.8.5 设 $f^{(k)}$ 是 S 中一列双全纯映射，它在 B_n 的任一紧子集上一致收敛于 f. 如果 $f(rB_n)$ 是欧氏凸的，那么对任意 $\varepsilon>0$，一定存在 k_0，使得当 $k>k_0$ 时，$f^{(k)}((r-\varepsilon)B_n)$ 是欧氏凸的.

证 因为

$$\left|\det\left(\frac{df(0)}{dz}\right)\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\det\left(\frac{df^{(k)}(0)}{dz}\right)\right|=1,$$

所以由定理 2.2.8，f 是 B_n 上的双全纯映射. 因为 $f(rB_n)$ 是凸的，由定理 2.5.13，对 $z\in rB_n$ 及所有满足 $\operatorname{Re}(\bar{z}\alpha')=0$ 的单位向量

α，有

$$\operatorname{Re}\left\{1-\bar{z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1}\frac{d^2f}{dz^2}(\alpha^2)'\right\}>0. \tag{1}$$

记

$$H=\{(z,\alpha):|z|\leqslant r-\varepsilon,|\alpha|=1,\operatorname{Re}(\bar{z}\alpha')=0\},$$

H 是 $\mathbf{R}^{4n}$中的紧集．容易知道

$$h(z,\alpha)=\operatorname{Re}\left\{\bar{z}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1}\frac{d^2f}{dz^2}(\alpha^2)'\right\}$$

在 H 上有最大值，设 $(z^{(0)},\alpha^{(0)})$ 达到了最大值．由（1）知 $h(z^{(0)},\alpha^{(0)})<1$. 选取 $\eta>0$，使得

$$h(z^{(0)},\alpha^{(0)})+\eta<1.$$

记

$$h^{(k)}(z,\alpha)=\operatorname{Re}\left\{\bar{z}\left(\frac{df^{(k)}}{dz}\right)^{-1}\frac{d^2f^{(k)}}{dz^2}(\alpha^2)'\right\},\ (z,\alpha)\in H,$$

则 $h^{(k)}$在 H 上一致收敛于 h．于是，当 $k>k_0$ 时，有

$$h^{(k)}(z,\alpha)<h(z,\alpha)+\eta\leqslant h(z^{(0)},\alpha^{(0)})+\eta<1$$

对所有 $(z,\alpha)\in H$ 成立．由定理 2.5.13，$f^{(k)}((r-\varepsilon)B_n)$ 是欧氏凸的． □

定理 2.8.4 的证明 由定理 2.8.1，对每个 $f\in\tilde{S}$，存在 $r(f)\in(0,1)$. 命 $r_0=\inf\{r(f):f\in\tilde{S}\}$，我们证明 $r_0>0$. 如果 $r_0=0$，那么存在一列 $f^{(k)}\in\tilde{S}$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}r(f^{(k)})=0$. 因为 $\tilde{S}$ 是正规族，故从 $\{f^{(k)}\}$ 中可以取出一个内闭一致收敛的子列，不妨设这个子列就是它自己，它的极限映射是 f. 因为$\lim\limits_{k\to\infty}r(f^{(k)})=0$，所以存在 k_1，当 $k>k_1$ 时，$r(f^{(k)})<\frac{1}{2}r(f)$. 另一方面，因为 $f(r(f)B_n)$是欧氏凸的，由引理 2.8.5 存在 k_2，当 $k>k_2$ 时，$f^{(k)}\left(\frac{1}{2}r(f)B_n\right)$是欧氏凸的．因此当 $k>\max(k_1,k_2)$ 时，从 $f^{(k)}\left(\frac{1}{2}r(f)B_n\right)$ 是欧氏凸的导致 $r(f^{(k)})\geqslant\frac{1}{2}r(f)$，这和

$r(f^{(k)}) < \frac{1}{2}r(f)$相矛盾．这个矛盾证明了 $r_0>0$．取 $g\in\widetilde{S}$，显然 $r(g)\geqslant r_0$．因为 $g(r(g)B_n)$ 是欧氏凸的，所以 $g(r_0B_n)$ 也是欧氏凸的．任取 $\rho>r_0$，如果对所有 $f\in\widetilde{S}$，$f(\rho B_n)$ 都是欧氏凸的，那么 $\rho\leqslant r_0$，这不可能．因此 r_0 是 $\widetilde{S}$ 的凸性半径． □

由定理 2.6.1，B_n 上每个规范化的星形映射的模有下列估计

$$|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2},\quad z\in B_n.$$

因此 B_n 上的规范化的星形映射族是局部一致有界的，由定理 1.2.8，它是一个正规族．于是从定理 2.8.4 即得

定理 2.8.6 B_n 上的规范化的星形映射族存在凸性半径．

一个很自然的猜测是：B_n 上规范化的星形映射族的凸性半径 $r_0=2-\sqrt{3}$．但现在还没有得到证明．

本节材料取自 [Sh 2].

[注记]

首先讨论域之间的全纯映射的是 K. Reinhardt，他讨论的域就是现在所谓的 Reinhardt 域．对全纯映射理论发展作出主要贡献的是 H. Cartan [Ca 2，141～254，255～275，336～369]．关于单叶映射的定理 2.2.3 首先是由 Clements 证明的，这里的证明选自 [Na]．$n=2$ 时，球 B_2 的全纯自同构首先出现在 Poincaré 的工作中，球和多圆柱的非全纯等价性也是 Poincaré 于 1906 年首先证明的．现在关于这一重要事实的证明已有不少，这里的定理 2.3.15 的证明选自 [Ru2]，定理 2.5.15 的证明选自 [Sh1]．多圆柱和球上星形映射和凸映射的判别法的证明选自 [Su1] 和 [Ki]．这些结果在 Banach 空间上的推广可参见 [Su2]．多圆柱上凸映射的表示定理（定理 2.5.7）有一些有趣的应用，可参见 [Mi] 和 [Sh1]．§2.1～§2.4 的内容可参阅文献 [Kr] 和 [Ru2]；§2.6 的内容可参阅 [BFG2]，[DZ]，[GL]，[Liu1] 和 [Th]；§2.7 的内容可参阅 [BFG1]，[DR]，[Liu2]，§2.8 的内容可参阅 [Gol] 和 [Sh2]．关于星形映射和凸映射的增长定理、掩盖定理和偏差定理，

龚昇与国内外的合作者们做了大量工作，取得了很多新的进展，详细情形可参见龚昇的综合性文章 [G2] 和他的专著 [G3]，其中有大量的参考文献可供进一步研究时查阅.

第三章　正交系与 Bergman 核函数

§3.1　$(L^2\cap H)(\Omega)$上存在完备的正交系

3.1.1.　$(L^2\cap H)(\Omega)$ 是 Hilbert 空间

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，Ω 上平方可积函数的全体记为 $L^2(\Omega)$，即

$$L^2(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\mathbf{C}:\int_\Omega |f(z)|^2dm_{2n}(z)\ <\infty\right\}.$$

$L^2(\Omega)$ 中全纯函数的全体记为 $(L^2\cap H)(\Omega)$，它是本章的主要研究对象. 我们将首先证明 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间，它存在着可数的规范正交系. 在此基础上，我们引进域 Ω 的 Bergman 核函数的概念，它是研究有界域的重要工具.

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域. 在 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中引进内积如下：

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega f(z)\overline{g}(z)dm_{2n}(z),f,g\in(L^2\cap H)(\Omega),$$

$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$是 f 的范数. 容易用常规的方法证明它是一个内积空间. 为了证明它是一个 Hilbert 空间，我们先证明下面的引理. 这个引理虽然简单，但在本章的讨论中却起着关键作用.

引理 3.1.1　任意固定 $a\in\Omega$ 及以 a 为中心的闭多圆柱 $\overline{P}(a,r)=\{z\in\mathbf{C}^n: |z_j-a_j|\leqslant r_j, j=1,\cdots,n\}\subset\Omega$，则对任意 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$，有下列估计

$$|f(a)|\leqslant\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}r_1\cdots r_n}\|f\|. \tag{1}$$

证　不妨设 $a=0$. 命 f 在 $P(0,r)$ 中的展开式为

$$f(z)=\sum_{\alpha}c_\alpha z^\alpha,\ c_\alpha=\frac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!}.$$

于是

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\int_\Omega|f(z)|^2dm_{2n}(z)\geqslant\int_P|f(z)|^2dm_{2n}(z)\\&=\sum_{\alpha,\beta}c_\alpha\bar{c}_\beta\int_P z^\alpha\bar{z}^\beta dm_{2n}(z)\\&=\sum_\alpha|c_\alpha|^2\int_P|z^\alpha|^2dm_{2n}(z)\geqslant|c_0|^2\pi^n r_1^2\cdots r_n^2.\end{aligned}$$

由此即得 (1). □

从这简单的引理 3.1.1 可得一有用的推论.

推论 3.1.2 设 K 是 Ω 中的紧集，则存在一个与 K 有关的常数 $M(K)$，使得对任意 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$及 $z\in K$ 有

$$|f(z)|\leqslant M(K)\|f\|.$$

证 设 $d(\partial\Omega,\ \overline{K})=\rho$，取 $r=\frac{\rho}{2\sqrt{n}}$，则对每个 $z\in K$，$\overline{P}(z,\ r)=\{|\zeta_j-z_j|<r,j=1,\cdots,n\}\subset\Omega$. 事实上，当 $\zeta\in\overline{P}(z,\ r)$ 时，$|\zeta_j-z_j|<\frac{\rho}{2\sqrt{n}}$，$j=1,\ \cdots,\ n$. 所以

$$|\zeta-z|^2=\sum_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^2<\sum_{j=1}^n\frac{\rho^2}{4n}=\frac{\rho^2}{4},$$

即 $\zeta\in\Omega$. 由引理 3.1.1 即得

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}r^n}\|f\|.\ \square$$

现在可以证明

定理 3.1.3 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间.

证 只要证明$(L^2\cap H)(\Omega)$是完备的. 任取$(L^2\cap H)(\Omega)$中一个 Caucby 序列 $\{f_k\}$，设 K 是 Ω 中任意一个紧集，由推论 3.1.2，存在 $M(K)$，使得

$$|f_l(z)-f_k(z)|\leqslant M(K)\|f_l-f_k\|<M(K)\epsilon$$

对每个 $z \in K$ 及充分大的 l, k 成立，因而 $\{f_k\}$ 在 Ω 中内闭一致收敛，设其收敛到 f，则 $f \in H(\Omega)$. 根据 Fatou 引理，

$$\int_\Omega \varliminf_{k \to \infty} |f_l - f_k|^2 dm_{2n} \leqslant \varliminf_{k \to \infty} \int_\Omega |f_l - f_k|^2 dm_{2n} = \varliminf_{k \to \infty} \| f_l - f_k \|^2,$$

这说明当 l 充分大时，$\int_\Omega |f_l - f|^2 dm_{2n} < \varepsilon$，即当 $l \to \infty$ 时，$\| f_l - f \| \to 0$. 因而 $\{f_k\}$ 按范数收敛于 f. 今取定 l，使 $\| f_l - f \| < 1$，于是

$$\| f \| \leqslant \| f_l - f \| + \| f_l \| \leqslant 1 + \| f_l \| < +\infty.$$

由此即知 $f \in (L^2 \cap H)(\Omega)$，所以 $(L^2 \cap H)(\Omega)$ 是完备的，因而是 Hilbert 空间. □

3.1.2 $(L^2 \cap H)(\Omega)$ 上规范正交系的基本性质

定义 3.1.4 如果 $(L^2 \cap H)(\Omega)$ 中一列函数 $\{\varphi_k\}$ 满足 $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \delta_{kl}$，就称 $\{\varphi_k\}$ 为 $(L^2 \cap H)(\Omega)$ 中一组**规范正交系**.

设 $\{\varphi_k\}$ 是 $(L^2 \cap H)(\Omega)$ 中一组规范正交系，f 是 $(L^2 \cap H)(\Omega)$ 中任一函数，命 $a_k = \int_\Omega f(z) \overline{\varphi_k}(z) dm_{2n}(z) = \langle f, \varphi_k \rangle$. 称 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(z)$ 为 f 对正交系 $\{\varphi_k\}$ 的 Fourier 级数. 容易证明下面的 Bessel 不等式.

命题 3.1.5 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $(L^2 \cap H)(\Omega)$ 上的一组规范正交系，$\{a_k\}$ 是 $f \in (L^2 \cap H)(\Omega)$ 的 Fourier 系数，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \| f \|^2.$$

证 对任意正整数 N，

$$0 \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\|^2 = \int_\Omega \left(f - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right) \left(\bar{f} - \sum_{k=1}^{N} \bar{a}_k \bar{\varphi}_k \right) dm_{2n}$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2.$$

由此即得所要证的不等式. □

在进一步讨论规范正交系的性质时，我们还需要

引理 3.1.6 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中一组规范正交系，那么对任意 Ω 中的紧集 K，存在 $M(K)$，使得对任意 $z\in K$ 及正整数 N，均有

$$\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(z)|^2\leqslant M(K).$$

证 对于固定的 $z\in K$，命 $f(\zeta)=\sum_{k=1}^{N}\overline{\varphi_k(z)}\ \varphi_k(\zeta)$，则

$$\|f\|^2=\int_\Omega\left|\sum_{k=1}^{N}\overline{\varphi_k(z)}\ \varphi_k(\zeta)\right|^2dm_{2n}(\zeta)$$

$$=\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{N}\overline{\varphi_k(z)}\ \varphi_k(\zeta)\right)\left(\sum_{l=1}^{N}\varphi_l(z)\overline{\varphi_l(\zeta)}\right)dm_{2n}(\zeta)$$

$$=\sum_{k,l=1}^{N}\overline{\varphi_k(z)}\ \varphi_l(z)\int_\Omega\varphi_k(\zeta)\overline{\varphi_l(\zeta)}\ dm_{2n}(\zeta)=\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(z)|^2.$$

所以 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$. 于是由推论 3.1.2，存在 $M_1(K)$，使得对任意 $z\in K$ 有 $|f(z)|\leqslant M_1(K)\|f\|$，此即

$$\left\{\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(z)|^2\right\}^2\leqslant M_1^2(K)\int_\Omega\left|\sum_{k=1}^{N}\overline{\varphi_k(z)}\varphi_k(\zeta)\right|^2dm_{2n}(\zeta)$$

$$=M_1^2(K)\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(z)|^2.$$

让 $M(K)=M_1^2(K)$，即得所要证的不等式. □

定理 3.1.7 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中的一组规范正交系，$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty$，那么

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(z)$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中的函数 g；

(ii) $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|g-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k\right\|=0$；

(iii) a_k 就是 g 的 Fourier 系数，即 $a_k=\langle g,\varphi_k\rangle$.

证 (i) 任取 $K\subset\subset\Omega$，由引理 3.1.6，

$$\Big|\sum_{k=N}^{\infty}a_k\varphi_k(z)\Big|^2\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|^2\sum_{k=N}^{\infty}|\varphi_k(z)|^2\leqslant M(K)\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|^2<\varepsilon,$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(z)$ 在 Ω 上内闭一致收敛，设其和函数为 $g(z)$，则 $g\in H(\Omega)$，而且

$$\|g\|^2=\int_\Omega\lim_{N\to\infty}\Big|\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(z)\Big|^2dm_{2n}(z)$$

$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\int_\Omega\Big|\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(z)\Big|^2dm_{2n}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty.$$

所以 $g\in(L^2\cap H)(\Omega)$.

(ii)

$$\Big\|g-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k\Big\|^2=\int_\Omega\Big|g-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k\Big|^2dm_{2n}$$

$$=\int_\Omega\lim_{l\to\infty}\Big|\sum_{k=1}^{l}a_k\varphi_k(z)-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(z)\Big|^2dm_{2n}(z)$$

$$\leqslant\lim_{l\to\infty}\int_\Omega\Big|\sum_{k=N+1}^{l}a_k\varphi_k(z)\Big|^2dm_{2n}(z)=\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|^2<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{N\to\infty}\Big\|g-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k\Big\|=0.$$

(iii) 固定 k，取充分大的 N，则

$$a_k=\int_\Omega\Big(\sum_{l=1}^{N}a_l\varphi_l\Big)\bar\varphi_k dm_{2n},$$

所以

$$\Big|\int_\Omega g\bar\varphi_k dm_{2n}-a_k\Big|\leqslant\int_\Omega\Big|g-\sum_{l=1}^{N}a_l\varphi_l\Big|\,|\bar\varphi_k|\,dm_{2n}$$

$$\leqslant\Big\|g-\sum_{l=1}^{N}a_l\varphi_l\Big\|\,\|\varphi_k\|\to0,\ N\to\infty,$$

即 $a_k=\langle g,\varphi_k\rangle$. □

定理 3.1.8 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 上的规范正交系，则

$$K(z,\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}$$

是 $(z,\bar{\zeta})\in\Omega\times\Omega$ 的全纯函数；当 ζ 固定时，$K(z,\zeta)$ 对 z 而言属于 $(L^2\cap H)(\Omega)$.

证 由引理 3.1.6，$\sum_{k=1}^{\infty}|\overline{\varphi_k(\zeta)}|^2<\infty$，故由定理 3.1.7 (i)，对每个 ζ，$K(z,\zeta)\in(L^2\cap H)(\Omega)$. 当 z 固定时，$K(z,\zeta)$是$\bar{\zeta}$的全纯函数，根据 Hartogs 定理，$K(z,\zeta)$ 是$(z,\bar{\zeta})$的全纯函数. □

3.1.3 $(L^2\cap H)$ (Ω) 上存在完备的规范正交系

下面我们要给出完备正交系的概念，为此先证明

定理 3.1.9 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中的规范正交系，则从下列三条中的任意一条可推出其它两条：

(i) 对任意 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$内闭一致地成立下列表达式

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(z),a_k=\langle f,\varphi_k\rangle;$$

(ii) 对任意 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$，如果 $\langle f,\varphi_k\rangle=0$，$k=1,2,\cdots$，那么 $f\equiv0$；

(iii) 若 $a_k=\langle f,\varphi_k\rangle$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2=\|f\|^2$.

证 (i) ⇒ (iii). 因为 $a_k=\langle f,\varphi_k\rangle$，由 Bessel 不等式，$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\leqslant\|f\|^2$，故由定理 3.1.7 (ii)，

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k\right\|=0.$$

但易知

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2,\text{ 故 (iii) 成立.}$$

(iii) ⇒ (ii) 显然.

(ii) ⇒ (i). 任取 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$，命 $a_k=\langle f,\varphi_k\rangle$，则由 Bessel

不等式$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty$，再由定理 3.1.7 (i)，

$$g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(z)$$

是$(L^2\cap H)(\Omega)$中的元素，由定理 3.1.7(iii)，$a_k=\langle g,\varphi_k\rangle$，于是$\langle f-g,\varphi_k\rangle=0$. 由假定$f-g\equiv0$，因而

$$f(z)\equiv g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(z). \square$$

定义 3.1.10 设$\{\varphi_k\}$是$(L^2\cap H)(\Omega)$中的规范正交系，只要定理 3.1.9 的三条性质中有一条成立，就称$\{\varphi_k\}$是完备的.

由此可见，定理 3.1.9 中的三条性质对完备的规范正交系都是成立的. 问题是在$(L^2\cap H)(\Omega)$中是否存在这样的完备规范正交系？按照一般的 Hilbert 空间理论，这样的完备规范正交系是一定存在的，但不一定是可数的. Bergman 首先证明$(L^2\cap H)(\Omega)$中存在着可数的完备规范正交系.

定理 3.1.11 $(L^2\cap H)(\Omega)$中存在可数的完备规范正交系.

证 通过下面三步给出定理的证明.

(一) 不妨设$0\in\Omega$. 我们把多重指标$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$按下列规定来排序：

如果$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$满足下面两条中的一条，就说$\alpha<\beta$：

(a) 如果$|\alpha|<|\beta|$；

(b) 当$|\alpha|=|\beta|$时，存在某个k，$1\leqslant k\leqslant n$，使得$\alpha_n=\beta_n,\cdots,\alpha_{k+1}=\beta_{k+1}$，$\alpha_k<\beta_k$.

按照这个规定，任何两个指标都可比较大小. 对于给定的α，定义

$$E^\alpha=\{f\in(L^2\cap H)(\Omega);(D^\alpha f)(0)=1;\\ \text{若 }\beta<\alpha,\ (D^\beta f)(0)=0\}.$$

容易看出 E^α 不是空集，因为 $\frac{z^\alpha}{\alpha!}\in E^\alpha$. 考虑 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 上的泛函

$$F(f)=\|f\|^2,\ f\in(L^2\cap H)(\Omega).$$

我们提出在 E^α 中求上述泛函的极小解，即找 $h\in E^\alpha$，使得 $\|h\|^2=\inf\{\|f\|^2: f\in E^\alpha\}$. 下面证明，这样的 h 是存在的. 命 $A=\inf\{\|f\|^2: f\in E^\alpha\}$，取一串 $f_k\in E^\alpha$，使得 $\|f_k\|^2\to A$. 由推论 3.1.2，对任意紧集 $K\subset\subset\Omega$ 及 $z\in K$ 有 $|f_k(z)|\leqslant M(K)\cdot\|f_k\|$，从 $\|f_k\|^2\to A$ 即知 $\{f_k\}$ 是一正规族，故可选出内闭一致收敛的子列，这个子列仍记为 $\{f_k\}$，设其极限函数为 h，则 $h\in H(\Omega)$. 因为 $f_k\in E^\alpha$，且 h 是 f_k 的内闭一致收敛的极限，所以

$$(D^\alpha h)(0)=1,(D^\beta h)(0)=0，如果\ \beta<\alpha.$$

另外对任意 $K\subset\subset\Omega$，

$$\int_K|h|^2dm_{2n}=\lim_{k\to\infty}\int_K|f_k|^2dm_{2n}\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_\Omega|f_k|^2dm_{2n}=A,$$

因而 $\int_\Omega|h|^2dm_{2n}\leqslant A$，这说明 $h\in E^\alpha$，且 $\|h\|^2\leqslant A$. 按 A 的定义，应有 $\|h\|^2\geqslant A$，所以 $\|h\|^2=A$. 从 $(D^\alpha h)(0)=1$ 知道 $h\neq0$，因而 $A>0$. 从上面的讨论得知，h 是上述问题的极小解，因为它与 E^α 有关，我们把它记为 h_α.

（二）我们证明 $\{h_\alpha\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中的正交系.

为此先证明 h_α 有下列性质：如果 $g\in(L^2\cap H)(\Omega)$，且对任意 $\beta\leqslant\alpha$ 有 $(D^\beta g)(0)=0$，那么 $\langle h_\alpha, g\rangle=0$.

事实上，对任意复数 c，

$$D^\alpha(h_\alpha+cg)(0)=(D^\alpha h_\alpha)(0)+c(D^\alpha g)(0)=1,$$

而当 $\beta<\alpha$ 时，$D^\beta(h_\alpha+cg)(0)=0$，所以 $h_\alpha+cg\in E^\alpha$，因而 $\|h_\alpha+cg\|^2\geqslant A$. 但另一方面，

$$\|h_\alpha+cg\|^2=\|h_\alpha\|^2+|c|^2\|g\|^2+c\langle g, h_\alpha\rangle+\bar{c}\langle h_\alpha, g\rangle.$$

若取 $c=-\frac{\langle h_\alpha, g\rangle}{\|g\|^2}$，则

$$\|h_\alpha+cg\|^2=\|h_\alpha\|^2-\frac{|\langle h_\alpha, g\rangle|^2}{\|g\|^2}.$$

故若 $\langle h_\alpha, g\rangle\neq 0$，则从上式得 $\|h_\alpha+cg\|^2<\|h_\alpha\|^2=A$，这与 $\|h_\alpha+cg\|^2\geqslant A$ 相矛盾，因而 $\langle h_\alpha, g\rangle=0$.

从 h_α 的这一性质，容易证明（一）中极值问题的解是唯一的. 因若有 h_α 和 $\tilde{h}_\alpha$ 两个解，那么

$$D^\alpha(h_\alpha-\tilde{h}_\alpha)(0)=0,\ \text{当}\ \beta<\alpha\ \text{时},\ D^\beta(h_\alpha-\tilde{h}_\alpha)(0)=0.$$

根据上面的性质，

$$\langle h_\alpha,\ h_\alpha-\tilde{h}_\alpha\rangle=\langle\tilde{h}_\alpha,\ h_\alpha-\tilde{h}_\alpha\rangle=0,$$

即 $\langle h_\alpha-\tilde{h}_\alpha,\ h_\alpha-\tilde{h}_\alpha\rangle=\|h_\alpha-\tilde{h}_\alpha\|^2=0$，所以 $h_\alpha=\tilde{h}_\alpha$.

现在证明 $\{h_\alpha\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中的正交系. 任取 $\alpha\neq\beta$，不妨设 $\alpha<\beta$，则对任意 $\gamma=(\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_n)\leqslant\alpha$，必有 $\gamma<\beta$，因面 $(D^\gamma h_\beta)(0)=0$，由（二）中所证的性质 $\langle h_\alpha, h_\beta\rangle=0$. 命 $\varphi_\alpha=\frac{h_\alpha}{\|h_\alpha\|}$，则 $\{\varphi_\alpha\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中一组规范正交系.

（三）我们证明 $\{\varphi_\alpha\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中的完备的规范正交系.

任取 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$，让 $\{a_\alpha\}$ 是一个待定的数列. 命

$$f_\alpha(z)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}a_\beta\varphi_\beta(z). \tag{2}$$

现选取 a_β，使得当 $\beta\leqslant\alpha$ 时有

$$(D^\beta f_\alpha)(0)=(D^\beta f)(0). \tag{3}$$

这是做得到的. 因若把 α 前面的多重指标按规定的次序排成 $\beta^{(1)}<\beta^{(2)}<\cdots<\alpha$，则（2）可写成

$$f_\alpha(z)=a_{\beta^{(1)}}\varphi_{\beta^{(1)}}+a_{\beta^{(2)}}\varphi_{\beta^{(2)}}+\cdots+a_\alpha\varphi_\alpha.$$

于是根据 φ_β 的选取，即可得

$$(D^{\beta^{(1)}}f_\alpha)(0)=a_{\beta^{(1)}}\frac{1}{\|h_{\beta^{(1)}}\|},$$

$$(D^{\beta^{(2)}}f_\alpha)(0)=a_{\beta^{(1)}}(D^{\beta^{(2)}}\varphi_{\beta^{(1)}})(0)+a_{\beta^{(2)}}\frac{1}{\|h_{\beta^{(2)}}\|},$$

…………………………………………

$$(D^\alpha f_\alpha)(0)=a_{\beta^{(1)}}(D^\alpha\varphi_{\beta^{(1)}})(0)+\cdots+a_\alpha\frac{1}{\|h_\alpha\|}.$$

因而等式(3)为

$$a_{\beta^{(1)}}\frac{1}{\|h_{\beta^{(1)}}\|}=(D^{\beta^{(1)}}f)(0),$$

$$a_{\beta^{(1)}}(D^{\beta^{(2)}}\varphi_{\beta^{(1)}})(0)+a_{\beta^{(2)}}\frac{1}{\|h_{\beta^{(2)}}\|}=(D^{\beta^{(2)}}f)(0),$$

…………………………………………

$$a_{\beta^{(1)}}(D^\alpha\varphi_{\beta^{(1)}})(0)+\cdots\cdots+a_\alpha\frac{1}{\|h_\alpha\|}=(D^\alpha f)(0).$$

这个线性方程组的系数行列为 $(\|h_{\beta^{(1)}}\|\cdots\|h_\alpha\|)^{-1}\neq 0$，因而 a_β $(\beta\leqslant\alpha)$ 是唯一确定的. 现在对每个 $\beta\leqslant\alpha$ 有 $D^\beta(f_\alpha-f)(0)=0$，故由（二）中所证的性质，$\langle f_\alpha-f,\varphi_\alpha\rangle=0$，即 $\langle f_\alpha,\varphi_\alpha\rangle=\langle f,\varphi_\alpha\rangle=a_\alpha$. 这说明 a_α 是 f 相对于正交系 $\{\varphi_\alpha\}$ 的 Fourier 系数，因而 $\sum\limits_\alpha|a_\alpha|^2\leqslant\|f\|^2$. 于是由定理 3.1.7 (i)，

$$\sum_{\alpha\geqslant 0}a_\alpha\varphi_\alpha(z)=g(z)\in(L^2\cap H)(\Omega).$$

由(2)知 $g(z)=\lim\limits_{|\alpha|\to\infty}f_\alpha(z)$，因而对任意多重指标 β，

$$(D^\beta g)(0)=\lim_{|\alpha|\to\infty}(D^\beta f_\alpha)(0)=(D^\beta f)(0).$$

所以 $f\equiv g$，即 $f(z)=\sum\limits_{\alpha\geqslant 0}a_\alpha\varphi_\alpha(z)$，这就证明了 $\{\varphi_\alpha\}$ 是完备的.

□

由于 $\{\varphi_\alpha\}$ 是可数的，故可用一个指标来表示它. 所以 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 上的完备规范正交系可表示为 $\{\varphi_k\}$，$k=0,1,2,\cdots$. 由于 $\varphi_\alpha=\dfrac{h_\alpha}{\|h_\alpha\|}$，根据 h_α 的性质，有

$$D^\beta\varphi_\alpha(0) = \begin{cases} 0, & \beta<\alpha, \\ \|h_\alpha\|^{-1}, & \beta=\alpha. \end{cases}$$

因此 $\{\varphi_k\}$ 在原点附近分别有如下的展开式

$$\varphi_0(z)=a_0^{(0)}+a_1^{(0)}z_1+\cdots+a_n^{(0)}z_n+\cdots, \qquad a_0^{(0)}\neq 0,$$

$$\varphi_1(z)= \qquad a_1^{(1)}z_1+\cdots+a_n^{(1)}z_n+\cdots, \qquad a_1^{(1)}\neq 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(z)= \qquad a_n^{(n)}z_n+\cdots, \qquad a_n^{(n)}\neq 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这一事实在 §3.5 中讨论 Bergman 度量方阵的正定性时将要用到.

§3.2 有界圆型域的完备正交系

3.2.1 圆型域上全纯函数的展开式

上节通过一个极值问题证明，对 $\mathbf{C}^n$ 中的任意有界域 Ω，$(L^2\cap H)(\Omega)$ 中存在完备的规范正交系 $\{\varphi_k\}$，但这是一个纯粹的存在性的证明，对于 $\{\varphi_k\}$ 本身的形状一点信息也得不到. 但若对域加一些限制，例如 Ω 是圆型域或 Reinhardt 域，就能对 $\{\varphi_k\}$ 的形状作出一些判断.

定理 3.2.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的圆型域，那么每个 $f\in H(\Omega)$ 必能在 Ω 上展为由齐次多项式组成的内闭一致收敛的级数：

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z),$$

其中 $P_k(z)$ 是 k 次齐次多项式.

证 取 $\rho>1$，记 $\Omega_\rho=\dfrac{1}{\rho}\Omega$，那么 Ω_ρ 也是包含原点的圆型域. 考虑函数

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda z)\ \frac{d\lambda}{\lambda-1},\quad z\in\Omega_\rho,\quad f\in H(\Omega).$$

它是 Ω_ρ 中的全纯函数. 当 z 在原点的一个小邻域中, $|\lambda|\leqslant\rho$ 时, λz 仍在原点的小邻域中,因此 $f(\lambda z)$ 作为单复变数 λ 的函数在 $|\lambda|\leqslant\rho$ 中全纯, 于是由单复变的 Cauchy 积分公式,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\frac{f(\lambda z)}{\lambda-1}d\lambda=f(z).$$

因此在原点附近 $\psi(z)=f(z)$.

当 $|\lambda|=\rho$ 时,

$$\frac{1}{\lambda-1}=\frac{1}{\lambda}\ \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{k+1},$$

若命

$$P_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\frac{f(\lambda z)}{\lambda^{k+1}}d\lambda,\tag{1}$$

则

$$\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z).\tag{2}$$

不难证明 $P_k(z)$ 是 z 的 k 次齐次多项式. 事实上, 如果命 $\tau=e^{i\theta}\lambda$, 则

$$\begin{aligned}P_k(e^{i\theta}z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\frac{f(e^{i\theta}\lambda z)}{\lambda^{k+1}}d\lambda\\&=e^{ik\theta}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=\rho}\frac{f(\tau z)}{\tau^{k+1}}d\tau\right\}=e^{ik\theta}P_k(z).\end{aligned}\tag{3}$$

另一方面, 由 (1) 知 $P_k(z)$在原点附近全纯, 故有展开式

$$P_k(z)=\sum_{\alpha\geqslant 0}c_\alpha z^\alpha,$$

由 (3) 即得

$$\sum_{\alpha\geqslant 0}(e^{i|\alpha|\theta}-e^{ik\theta})\ c_\alpha z^\alpha=0.$$

故当$|\alpha|\neq k$时，$c_\alpha=0$，因而在原点附近P_k是k次齐次多项式，但P_k在Ω_ρ中全纯，故由唯一性定理，P_k是Ω_ρ上的k次齐次多项式$P_k(z)=\sum_{|\alpha|=k}c_\alpha z^\alpha$，注意到（2）以及$\psi$和$f$在原点附近恒等的事实，我们有

$$c_\alpha=\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha\psi)(0)=\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0).$$

这说明ψ的展开式和ρ无关．让$\rho\to 1$，即知（2）在Ω上也成立．既然ψ和f在原点附近相等，根据唯一性定理，两者在Ω上相等，因而有

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z).$$

由定理 1.5.19，它是内闭一致收敛的．□

3.2.2 有界圆型域的完备正交系

有了上面的定理，我们就可对有界圆型域上的完备规范正交系的形状作出一些判断．

定理 3.2.2 设Ω是$\mathbf{C}^n$中包含原点的有界圆型域，那么在$(L^2\cap H)(\Omega)$中存在一组完备的规范正交系$\{\varphi_{kl}\}$，$k=0,1,\cdots$；$l=1,\cdots,m_k$，$m_k=\binom{n+k-1}{k}$，每个φ_{kl}是k次齐次多项式．特别$\varphi_0=\varphi_{01}=(V(\Omega))^{-\frac{1}{2}}$，$V(\Omega)$是域$\Omega$的体积．

证 考虑单项式$z^\alpha=z^{\alpha_1}\cdots z^{\alpha_n}$，满足$|\alpha|=k$的单项式共有$m_k=\binom{n+k-1}{k}$个，把这$m_k$个单项式按照某一种次序排成一个$m_k$维行向量：

$$z^{[k]}=(z_1^k,\ z_1^{k-1}z_2,\ \cdots,\ z_n^k).$$

用H_k记方阵

$$H_k=\int_\Omega z^{[k]'}\overline{z}^{[k]}dm_{2n}\ (z),$$

由于 Ω 是有界域，H_k 存在. 显然 H_k 是一个 Hermite 方阵，而且是正定的. 事实上，任取 m_k 维向量 $u\neq 0$，则

$$uH_k\overline{u}'=\int_\Omega uz^{[k]'}\overline{z}^{[k]}\overline{u}'dm_{2n}(z)=\int_\Omega |uz^{[k]'}|^2dm_{2n}(z)>0.$$

因而必有非异方阵 A_k，使得 $H_k=A'_k\overline{A}_k$，即

$$\int_\Omega (z^{[k]}A_k^{-1})'\ \overline{(z^{[k]}A_k^{-1})}\ dm_{2n}\ (z)\ =I_{m_k}, \tag{4}$$

若命 $\varphi^{[k]}=z^{[k]}A_k^{-1}$，则 $\varphi^{[k]}$是 m_k 维向量. 由于 $z^{[k]}$的每一分量都是 z^α ($|\alpha|=k$) 这种形状的单项式，所以 $\varphi^{[k]}$的每一分量是 $z_1, \cdots, z_n$ 的 k 次齐次多项式. 若记

$$\varphi^{[k]}=\ (\varphi_{k1},\ \cdots,\ \varphi_{km_k}),$$

则由 (4) 得

$$\int_\Omega \varphi_{kj}\overline{\varphi}_{kl}dm_{2n}\ (z)\ =\delta_{jl}. \tag{5}$$

现在考虑函数系

$$\{\varphi_{kl}\},\ k=0,\ 1,\ \cdots;\ l=1,\ \cdots,\ m_k, \tag{6}$$

其中每一个 φ_{kl}是 $z_1, \cdots, z_n$ 的 k 次齐次多项式，且由 (5) 知，当 k 固定时，所得的 m_k 个函数是规范正交的. 现设 $k\neq j$，由于 Ω 是圆型的，变换 $w=e^{i\theta}z$ 把 Ω 变成 Ω，因而

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_{kl}(z)\ \overline{\varphi_{js}(z)}dm_{2n}(z)&=\int_\Omega \varphi_{kl}(e^{-i\theta}w)\overline{\varphi_{js}(e^{-i\theta}w)}dm_{2n}(w)\\&=e^{(j-k)\theta}\int_\Omega \varphi_{kl}(w)\overline{\varphi_{js}(w)}dm_{2n}(w),\end{aligned}$$

由此得

$$\int_\Omega \varphi_{kl}(z)\overline{\varphi_{js}(z)}dm_{2n}(z)=0, k\neq j.$$

这就证明了 (6) 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中一个规范正交系. 特别当 $k=$

0，记 $\varphi_0=\varphi_{01}$，它是一个常数，因为它是规范的，

$$\int_\Omega |\varphi_0|^2 dm_{2n} = |\varphi_0|^2 V(\Omega) = 1,$$

所以可取 $\varphi_0 = (V(\Omega))^{-\frac{1}{2}}$.

最后证明(6)是完备的.我们证明，如果 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$，且 $\langle f,\ \varphi_{kl}\rangle=0$，$k=0,1,\cdots$；$l=1,\cdots,m_k$，则 $f\equiv 0$. 事实上，由定理 3.2.1，f 在 Ω 上能写成

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z),\quad z\in\Omega, \tag{7}$$

其中 P_k 是 k 次齐次多项式. 因为 $z^{[k]}=\varphi^{[k]}A_k$，即每个 z^α（$|\alpha|=k$）都能用 $\varphi_{k1},\cdots,\varphi_{km_k}$ 线性表出，因而 $P_k(z)$ 也能用 $\varphi_{k1},\cdots,\varphi_{km_k}$ 线性表出，记

$$P_k(z)=\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}\varphi_{kl}(z).$$

今取一列域 Ω_k，使得 $\overline{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}$，$\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k=\Omega$，而且要求每个 Ω_k 是圆型的，这是一定能办到的. 因为如果 Ω_k 不是圆型的，就用 $\Omega_k'=\{e^{i\theta}z:\ z\in\Omega_k,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 来代替它. 于是

$$\begin{aligned}\langle f,\ \varphi_{0l}\rangle &=\int_\Omega f(z)\overline{\varphi_{kl}(z)}dm_{2n}(z)\\ &=\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega_m}\sum_{j=0}^{\infty}P_j(z)\overline{\varphi_{kl}(z)}dm_{2n}(z)\\ &=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\Omega_m}\sum_{s=1}^{m_j}a_{js}\varphi_{js}(z)\overline{\varphi_{kl}(z)}dm_{2n}(z)\\ &=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{m_j}a_{js}\int_{\Omega_m}\varphi_{js}(z)\overline{\varphi_{kl}(z)}dm_{2n}(z).\end{aligned}$$

这里 $\int_{\Omega_m}\sum_{j=0}^{\infty}=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\Omega_m}$ 是因为 $\sum_{j=0}^{\infty}P_j(z)$ 在 $\overline{\Omega}_m$ 上一致收敛.

因为当 $j\neq k$ 时，φ_{js}和 φ_{kl}在任何圆型域上正交，因而有

$$\langle f,\ \varphi_{kl}\rangle=\lim_{m\to+\infty}\sum_{s=1}^{m_k}a_{ks}\int_{\Omega_m}\varphi_{ks}(z)\overline{\varphi_{kl}(z)}dm_{2n}(z)$$

$$=\sum_{s=1}^{m_k}a_{ks}\int_{\Omega}\varphi_{ks}(z)\overline{\varphi_{kl}(z)}dm_{2n}(z)=a_{kl}.$$

由假定$\langle f,\varphi_{kl}\rangle=0$,所以 $a_{kl}=0$,因而 $P_k(z)\equiv0$,从而$f\equiv0$. □

对于包含原点的有界 Reinhardt 域，有更强的结果. 因为在定理 1.3.3 中，我们已经证明过，每个包含原点的 Reinhardt 域 Ω 上的全纯函数 f，在 Ω 上有幂级数展开式，

$$f(z)=\sum_{\alpha\geqslant0}a_\alpha z^\alpha.$$

容易直接证明$\left\{\dfrac{z^\alpha}{\|z^\alpha\|}\right\}$是 Reinhardt 域上的一组规范正交系，再用证明定理 3.2.2 的方法可以证明它是完备的. 因而有

定理 3.2.3 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界 Reinhardt 域，那么$\left\{\dfrac{z^\alpha}{\|z^\alpha\|}\right\}$是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中一组完备的规范正交系.

§ 3.3 Bergman 核函数

3.3.1 核函数的基本性质

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，在 § 3.1 我们证明了 $(L^2\cap H)(\Omega)$中存在完备的规范正交系，利用这个正交系，我们给出 Ω 的 Bergman 核函数的概念.

定义 3.3.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$\{\varphi_k\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中一组完备的规范正交系，称

$$K(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)},\quad z,\ \zeta\in\Omega$$

是 Ω 的 **Bergman 核函数**.

由定理 3.1.8，$K(z,\zeta)$是 z 和 $\bar{\zeta}$ 的全纯函数，当 ζ 固定时，$K(z,\zeta)$对 z 而言是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中的元素.

容易看出，$\overline{K(z,\zeta)}=K(\zeta,z)$.

核函数的再生性是它的重要性质.

定理 3.3.2 对任意 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$，有等式

$$f(z)=\int_\Omega K(z,\zeta)f(\zeta)dm_{2n}(\zeta),z\in\Omega.$$

证 因 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(z)$，其中 $a_k=\int_\Omega f(\zeta)\overline{\varphi_k(\zeta)}dm_{2n}(\zeta)$. 只要证明

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\int_\Omega f(\zeta)K(z,\zeta)dm_{2n}(\zeta)-\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(z)\right\}=0.$$

由 Schwarz 不等式和 Fatou 引理，即得

$$\left|\int_\Omega f(\zeta)K(z,\zeta)dm_{2n}(\zeta)-\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(z)\right|$$

$$=\left|\int_\Omega f(\zeta)\sum_{k=m+1}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}dm_{2n}(\zeta)\right|$$

$$\leqslant\|f\|\left\{\int_\Omega\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}\right|^2dm_{2n}(\zeta)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\|f\|\varliminf_{N\to\infty}\left\{\int_\Omega\left|\sum_{k=m+1}^{N}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|f\|\sum_{k=m+1}^{\infty}|\varphi_k(z)|^2<\varepsilon,\ m>m_0.$$

最后的不等式是因为 $\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(z)|^2<\infty$. 这就是要证明的. □

推论 3.3.3 对任意 $g\in L^2(\Omega)$，命

$$(Pg)(z)=\int_\Omega K(z,\zeta)g(\zeta)dm_{2n}(\zeta),$$

则 P 是 $L^2(\Omega)$到$(L^2\cap H)(\Omega)$之上的投影算子.

证 因为$(L^2\cap H)(\Omega)$是 $L^2(\Omega)$的一个闭子空间,故对每个 $g\in L^2(\Omega)$,有正交分解 $g=g_1+g_2$,其中 $g_1\in(L^2\cap H)(\Omega)$,$g_2\perp(L^2\cap H)(\Omega)$,由定理 3.3.2,$Pg_1=g_1$. 由于 $K(\zeta,z)$对 ζ 而言是$(L^2\cap H)(\Omega)$中的函数,所以

$$\int_\Omega g_2(\zeta)K(z,\zeta)dm_{2n}(\zeta)=\int_\Omega g_2(\zeta)\overline{K(\zeta,z)}dm_{2n}(\zeta)=0.$$

即 $Pg_2=0$. 于是

$$Pg=P(g_1+g_2)=Pg_1=g_1. \quad \square$$

我们称 P 为 $L^2(\Omega)$到 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 上的 Bergman **投影算子**.

从核函数的定义来看,似乎核函数依赖于完备正交系的选取,其实不然. 对于任意给定的$\zeta\in\Omega$,定义 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 上的线性泛函如下:

$$T_\zeta(f)=f(\zeta),f\in(L^2\cap H)(\Omega).$$

由推论 3.1.2,$|f(\zeta)|\leqslant M(\zeta)\|f\|$,所以 T_ζ 是 Hilbert 空间 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 上的有界线性泛函,根据 Riesz 表示定理,存在唯一的 $g_\zeta\in(L^2\cap H)(\Omega)$,使得

$$T_\zeta(f)=\langle f,g_\zeta\rangle \tag{1}$$

对每个 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$成立. 特别选取 $f=\varphi_k$,从 (1) 得$\varphi_k(\zeta)=\langle\varphi_k,g_\zeta\rangle$,或者$\overline{\varphi_k(\zeta)}=\langle g_\zeta,\varphi_k\rangle$,即$\overline{\varphi_k(\zeta)}$是 g_ζ 的 Fourier 系数,因而有

$$g_\zeta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\varphi_k(\zeta)}\varphi_k(z)=K(z,\zeta). \tag{2}$$

这说明核函数 $K(z,\zeta)$ 就是 $g_\zeta(z)$,它和正交系的选取无关. 把(2)代入(1),我们再一次得到定理 3.3.2.

当然核函数是取复数值的,但当 $\zeta=z$ 时,它取正数值.

命题 3.3.4 对每个 $z\in\Omega$,均有 $K(z,z)>0$.

证 按定义

$$K(z,\ z)\ =\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(z)|^2\geqslant 0.$$

若有某点 $z_0\in\Omega$，使得 $K(z_0,z_0)=0$，则必 $\varphi_k(z_0)\ =0$，$k=0$，1，2，…因而对任意 $f\in(L^2\cap H)(\Omega)$，有

$$f(z_0)\ =\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(z_0)\ =0.$$

这是不可能的，因为 $1\in(L^2\cap H)(\Omega)$. □

下面的命题给出了乘积域的核函数的计算方法.

命题3.3.5 设 Ω_1 和 Ω_2 分别是 $\mathbf{C}^n$ 和 $\mathbf{C}^m$ 中的有界域，$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$，若用 K_1,K_2,K 分别记 Ω_1,Ω_2,Ω 的核函数，那么 $K=K_1K_2$.

证 记 $z'=(z_1,\ \cdots,\ z_n)$，$z''=(z_{n+1},\ \cdots,\ z_{n+m})$，$z=(z',\ z'')$，我们要证明

$$K(z,\zeta)=K_1(z',\zeta')K_2(z'',\zeta''). \tag{3}$$

当 z'，$\zeta'\in\Omega_1$，z''，$\zeta''\in\Omega_2$ 时，命

$$g(z,\zeta)=K_1(z',\zeta')K_2(z'',\zeta''). \tag{4}$$

由核函数的再生性，

$$\begin{aligned}g(t,\zeta)&=\int_{\Omega}g(z,\zeta)K(t,z)dm_{2(n+m)}(z)\\&=\int_{\Omega}K_1(z',\zeta')K_2(z'',\zeta'')K(t,z)dm_{2(n+m)}(z)\\&=\int_{\Omega_1}K_1(z',\zeta')dm_{2n}(z')\int_{\Omega_2}K_2(z'',\zeta'')K(t,z)dm_{2m}(z''),\end{aligned}$$

再利用核函数的再生性得

$$\begin{aligned}&\overline{\int_{\Omega_2}K_2(z'',\zeta'')K(t,z)dm_{2m}(z'')}\\&=\overline{\int_{\Omega_2}K_2(\zeta'',z'')K(z',z'',t)dm_{2m}(z'')}\\&=\overline{K(z',\zeta'',t)},\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
g(t,\zeta) &= \int_{\Omega_1} K_1(z',\zeta')\overline{K(z',\zeta'',t)}dm_{2n}(z') \\
&= \overline{\int_{\Omega_1} K_1(\zeta',z')K(z',\zeta'',t)dm_{2n}(z')} \\
&= \overline{K(\zeta',\zeta'',t)} \\
&= K(t,\zeta).
\end{aligned}
$$

从（4）即得（3）. □

下面的定理给出了两个双全纯等价域的核函数之间的关系.

定理 3.3.6 设 Ω 和 Ω_1 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，双全纯映射 $w=f(z)$ 把 Ω 一一地映为 Ω_1，Ω 和 Ω_1 的核函数分别记为 $K(z,\zeta)$ 和 $K_1(w,\eta)$，那么

$$
K(z,\zeta)=K_1(w,\eta)\det f'(z)\overline{\det f'(\zeta)},
$$

这里 $w=f(z),\eta=f(\zeta)$.

证 在§2.1中，我们曾记 $(Jf)(z)=\det f'(z)$，称它为 f 在 z 点处的复 Jacobian，称 $(J_Rf)(z)$ 为 f 在 z 点处的实 Jacobian，二者的关系是

$$
(J_Rf)(z)=|(Jf)(z)|^2.
$$

现在我们证明，如果 $\{\varphi_k(z)\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 上的完备规范正交系，那么

$$
\{\varphi_k(f^{-1}(w))(Jf^{-1})(w)\} \tag{5}
$$

是 $(L^2\cap H)(\Omega_1)$ 上的完备规范正交系. 事实上，对 Ω 上的积分作变量代换 $z=f^{-1}(w)$，就得到

$$
\begin{aligned}
\delta_{kl} &= \int_{\Omega} \varphi_k(z)\overline{\varphi_l(z)}dm_{2n}(z) \\
&= \int_{\Omega_1} \varphi_k(f^{-1}(w))\overline{\varphi_l(f^{-1}(w))}\,|(Jf^{-1})(w)|^2dm_{2n}(w) \\
&= \int_{\Omega_1} \{\varphi_k(f^{-1}(w))(Jf^{-1})(w)\}
\end{aligned}
$$

$$\cdot \overline{\{\varphi_k(f^{-1}(w))(Jf^{-1})(w)\}}dm_{2n}(w).$$

这说明 (5) 是 $(L^2\cap H)(\Omega_1)$ 上的规范正交系. 为了说明 (5) 也是完备的，我们只要证明，如果对任意 $g\in(L^2\cap H)(\Omega_1)$ 有

$$\int_{\Omega_1} g(w)\overline{\varphi_k(f^{-1}(w))(Jf^{-1})(w)}dm_{2n}(w)=0,$$

$$k=1, 2, \cdots \tag{6}$$

那么 $g\equiv 0$. 对 (6) 作变量代换 $w=f(z)$，注意到

$$(Jf)(z)dm_{2n}(z)=\overline{(Jf^{-1})(w)}dm_{2n}(w),$$

(6)可写成

$$\int_{\Omega} g(f(z))\varphi_k(z)(Jf)(z)dm_{2n}(z)=0. \tag{7}$$

由于$\{\varphi_k\}$是$(L^2\cap H)(\Omega)$上的完备正交系，从(7)可得

$$g(f(z))(Jf)(z)=0.$$

因为 f 是双全纯的，由定理 2.2.3，$(Jf)(z)$在 Ω 上处处不为 0，因而 $g(w)=0$. 既然 (6) 是 $(L^2\cap H)(\Omega_1)$ 上的完备规范正交系，所以 Ω_1 的核函数

$$\begin{aligned}
K_1(w,\eta)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(f^{-1}(w))(Jf^{-1})(w)\\
&\quad\cdot\overline{\varphi_k(f^{-1}(\eta))(Jf^{-1})(\eta)}\\
&=(Jf^{-1})(w)\overline{(Jf^{-1})(\eta)}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(f^{-1}(w))\\
&\quad\cdot\overline{\varphi_k(f^{-1}(\eta))}\\
&=(Jf^{-1})(w)\overline{Jf^{-1}(\eta)}K(z,\zeta).
\end{aligned}$$

这就是要证明的. □

现在来计算一个具体域的核函数.

例 3.3.7 计算 $\mathbf{C}^n$ 中单位球 B_n 的核函数.

解 由定理 1.4.6，

$$\int_{B_n} |z^\alpha|^2 dm_{2n}(z) = \frac{\pi^n}{n!}\int_{B_n} |z^\alpha|^2 d\nu_n(z)$$
$$= \frac{\pi^n \alpha!}{(n+|\alpha|)!}.$$

因此$\left\{\left(\frac{(n+|\alpha|)!}{\pi^n \alpha!}\right)^{\frac{1}{2}} z^\alpha\right\}$是 $(L^2 \cap H)(B_n)$ 的完备规范正交系，所以 B_n 的核函数是

$$K(z, \zeta) = \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{(n+|\alpha|)!}{\pi^n \alpha!} z^\alpha \bar{\zeta}^\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} z^\alpha \bar{\zeta}^\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi^n}\sum_{k=0}^{\infty} (n+k) \cdots (k+1) \langle z, \zeta\rangle^k$$
$$= \frac{n!}{\pi^n} \frac{1}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^{n+1}}. \qquad \square$$

命 $n=1$，就得到单位圆盘的核函数为

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-z\bar{\zeta})^2},$$

这里 z，ζ 都是模小于 1 的复数.

因为单位多圆柱是由 n 个单位圆盘构成的乘积域，由命题 3.3.5，即得多圆柱 U^n 的核函数为

$$\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-z_j\bar{\zeta}_j)^2}.$$

当然，直接从完备的规范正交系出发来计算 U^n 的核函数也不困难.

3.3.2 核函数与域的自同构

核函数与域的自同构有着密切的关系.

定理 3.3.8 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域.

(i) 如果 $\psi \in \mathrm{Aut}(\Omega)$，那么对任意 $z \in \Omega$ 有

$$|\det\psi'(z)|^2 = \frac{K(z,z)}{K(\psi(z),\psi(z))}. \tag{8}$$

(ii) 如果 Ω 是包含原点的可递域，$w=\varphi_a(z)$ 是把 $a\in\Omega$ 映为原点的全纯自同构，那么

$$K(a,a)=c\,|\det\varphi_a'(a)|^2. \tag{9}$$

特别，如果 Ω 是圆型域，那么 $c=(V(\Omega))^{-1}$.

证 (i) 利用定理 3.3.6 可得

$$K(z,z)=K(\psi(z),\psi(z))\,|\det\psi'(z)|^2,$$

这就是(8).

(ii)在(i)中取 $\varphi=\varphi_a$，$z=a$，即得

$$\begin{aligned}K(a,a)&=K(0,\ 0)\,|\det\varphi'_a(a)|^2\\&=c\,|\det\varphi_a'(a)|^2.\end{aligned}$$

这就是(9). 如果 Ω 是圆型域，由定理 3.2.2，可取 $\varphi_0=(V(\Omega))^{-\frac{1}{2}}$，于是

$$\begin{aligned}K(0,0)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(0)\overline{\varphi_k(0)}\\&=|\varphi_0|^2=(V(\Omega))^{-1}.\end{aligned}\qquad\square$$

定理 3.3.8 的两部分有着不同的作用. 如果知道域的核函数，那么通过 (8)，可以算出自同构的 Jacobian. 例如，我们已经算出球 B_n 的核函数为

$$K(z,\zeta)=\frac{n!}{\pi^n}\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+1}}.$$

今设 $\psi\in\mathrm{Aut}(B_n)$且有 $\psi(a)=0$. 由(8)即得

$$|\det\psi'(z)|^2=\left(\frac{1-|\psi(z)|^2}{1-|z|^2}\right)^{n+1}.$$

把命题 2.3.11 的等式代入上式，我们再一次得到定理 2.3.12 的等式

$$|\det\psi'(z)|^2=\left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z'|^2}\right)^{n+1}.$$

定理 3.3.8 的第二部分起着相反的作用. 我们知道，由于$(L^2\cap H)(B_n)$和$(L^2\cap H)(U^n)$中的完备规范正交系容易算出，所以 B_n 和

U^n 上的核函数可以通过正交系直接算得. 对其它一些域，这个办法往往行不通. 定理 3.3.8(ii) 告诉我们，如果能先算出 $|\det\varphi_z'(z)|^2$ 的值，由此即得 $K(z,z)$. 虽然它还不是 $K(z,\zeta)$，但由它唯一确定了 $K(z,\zeta)$（下面的命题 3.3.9 将证明这一事实）. 因此等式(9)给出了不通过正交系，而是由域的自同构来计算核函数的办法，§3.4 中将用这个方法给出四类典型域的核函数.

命题 3.3.9 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，Ω 的核函数 $K(z,\zeta)$ 由 $K(z,z)$ 所唯一确定.

实际上，它是一般命题 3.3.10 的特殊情形.

命题 3.3.10 设 $f(z,\zeta)$ 是 $\mathbf{C}^{2n}$ 原点附近的全纯函数. 如果 $f(z,\bar{z})=0$ 在原点附近成立，那么在原点附近有

$$f(z,\zeta)\equiv 0.$$

证 命 $w=\frac{1}{2}(z+\zeta)$，$\eta=\frac{1}{2i}(z-\zeta)$，则

$$f(z,\zeta)=f(w+i\eta,\ w-i\eta)\ =g(w,\eta),$$

$g(w,\eta)$ 也是 $\mathbf{C}^{2n}$ 原点附近的全纯函数，它在原点附近的 Taylor 展开式为

$$g(w,\eta)=\sum_{\alpha\geqslant 0}a_\alpha w^\beta\eta^\delta,$$

这里 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{2n})$ 是 $2n$ 维的多重指标，$\alpha=(\beta,\delta)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_n)$ 都是 n 维多重指标. 如果记 $z_j=x_j+iy_j$，$j=1,\cdots,n$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$，那么 $z=x+iy$，而当 $\zeta=\bar{z}$ 时，$w=x$，$\eta=y$. 因而从 $f(z,\bar{z})=0$ 得 $g(x,y)=0$，即

$$g(x,\ y)\ =\sum_{\alpha\geqslant 0}a_\alpha x^\beta y^\delta\equiv 0.$$

这是 g 在 $\mathbf{R}^{2n}$ 原点附近的 Taylor 展开式，由此即得 $a_\alpha=0$，即 $g(w,\eta)\equiv 0$，所以 $f(z,\zeta)\equiv 0$. □

还以单位球 B_n 为例，由定理 2.3.12 得

$$|\det\varphi_a'(z)|^2=\left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z,a\rangle|^2}\right)^{n+1},$$

因而

$$|\det\varphi_a'(a)|^2=\frac{1}{(1-|a|^2)^{n+1}},$$

所以

$$K(z,z)=\frac{n!}{\pi^n}\frac{1}{(1-|z|^2)^{n+1}},\quad z\in B_n.$$

再由命题 3. 3. 9 即得

$$K(z,\zeta)=\frac{n!}{\pi^n}\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+1}}.$$

§3. 4 典型域的核函数

3. 4. 1 四类典型域

这一节我们将利用上一节的定理 3. 3. 8 (ii) 来计算四类典型域的核函数. 先给出对称域的定义.

定义 3. 4. 1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域, $a\in\Omega$. 如果存在 $\varphi\in$ Aut (Ω),使得 $\varphi(a)=a$, 而对其它 $z\neq a$, $\varphi(z)\neq z$, 而且$\varphi^2=I$ (恒等变换), 则称 Ω 对于 a 点是对称的. 如果 Ω 对于它的每一点都是对称的, 则称 Ω 是**对称域**.

例如, 单位球 B_n 是对称域, 因为对于任意 $a\neq0$, $a\in B_n$, 命 $b=\frac{2a}{1+|a|^2}$, 容易直接验证, φ_b 便是 Aut (B_n) 中使 a 为其唯一不动点且满足 $\varphi_b^2=I$ 的全纯自同构; 如果 $a=0$, 那么变换 $w=zU$,

$$U=\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix},$$ 就是仅使原点为不动点的对合变换.

所以 B_n 对其每点都是对称的.

E. Cartan 在 1935 年证明了，除 $n=16$ 和 $n=27$ 维的复空间外，任何一个有界对称域必和下面四类域之一或四类域中若干个域的拓扑积全纯等价. 华罗庚教授用矩阵的形式把它们表示如下：

$R_{\mathrm{I}}(m,n)=\{Z: Z$ 是 $m\times n$ 复矩阵, $I_m-Z\overline{Z}'>0\}$,

这里 I_m 是 m 阶单位方阵. 当 $m=1$ 时, R_{I} 就是单位球. $R_{\mathrm{I}}(m,n)$ 称为**第一类典型域**或**矩阵双曲空间**.

$R_{\mathrm{II}}(n)=\{Z: Z$ 是 n 阶对称方阵 $Z=Z'$, $I_n-Z\overline{Z}>0\}$,

$R_{\mathrm{II}}(n)$ 称为**第二类典型域**或**对称方阵双曲空间**.

$R_{\mathrm{III}}(n)=\{Z$: Z 是 n 阶斜对称方阵 $Z=-Z'$, $I_n+Z\overline{Z}>0\}$,

$R_{\mathrm{III}}(n)$ 称为**第三类典型域**或**斜对称方阵双曲空间**.

$R_{\mathrm{IV}}(n)=\{z: z=(z_1,\cdots,z_n), |zz'|^2+1-2\overline{z}z'>0, |zz'|<1\}$, $R_{\mathrm{IV}}(n)$ 称为**第四类典型域**或 **Lie 球双曲空间**.

由于这四类典型域都是有界可递的圆型域，所以由定理 3.3.8，它们的核函数为

$$K(z,z)=K(0,0)|\det\varphi'_z(z)|^2,$$

其中 $K(0,0)=(V(\Omega))^{-1}$. 因此，计算这四类典型域的关键，是要算出它们的把 z 变为原点的全纯自同构的 Jacobian. 在这一节中，我们将给出计算 R_{I} 的核函数的详细过程. 其它三类域的核函数的算法是类似的，不再一一细述，有兴趣的读者可参阅 [Hua] 或 [Lu 1].

3.4.2 $R_{\mathrm{I}}(m, n)$ 的全纯自同构

我们分下面几步来计算 R_{I} 的核函数.

先写出 Aut（R_{I}）中把某点 Z_0 变为 O 的变换.

定理 3.4.2 设 A 是 m 阶方阵, B 是 $m\times n$ 矩阵, C 是 $n\times m$ 矩阵, D 是 n 阶方阵，它们满足：

$$\overline{A}A'-\overline{B}B'=I_m,\ \overline{A}C'=\overline{B}D',\ \overline{C}C'-\overline{D}D'=-I_n,\quad(1)$$

那么

$$W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1} \tag{2}$$

把 R_{I} 一一地变为自己.

为此先证明

引理 3.4.3 设 $Z\in R_{I}$.

(i) 若 n 阶方阵 D 和 $n\times m$ 矩阵 C 满足 $\bar{C}C'-\bar{D}D'=-I_n$, 那么 $CZ+D$ 可逆;

(ii) 若 m 阶方阵 A 和 $m\times n$ 矩阵 B 满足 $\bar{A}A'-\bar{B}B'=I_m$, 那么 $Z\bar{B}'+\bar{A}'$ 可逆.

证 (i) 从 $\bar{D}D'=\bar{C}C'+I_n$ 知道 $\bar{D}D'$ 正定. 因而 D 可逆. 命 $K=D^{-1}C$, 则

$$\begin{aligned}I_n-K\bar{K}'&=I_n-D^{-1}C\bar{C}'(\bar{D}')^{-1}\\&=I_n-D^{-1}(-I_n+D\bar{D}')(\bar{D}')^{-1}\\&=D^{-1}(\bar{D}')^{-1}>0,\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}I_n-KZ\overline{(KZ)}'&=I_n-KZ\bar{Z}'\bar{K}'\\&=I_n-K\bar{K}'+K(I-Z\bar{Z}')\bar{K}'>0.\end{aligned}$$

今若 $CZ+D=DKZ+D=D(KZ+I)$ 不可逆, 即 $KZ+I$ 不可逆, 则存在非零向量 ξ, 使得 $\xi(KZ+I)=0$, 即 $\xi=-\xi KZ$. 于是 $\xi\bar{\xi}'=\xi KZ\overline{(KZ)}'\bar{\xi}'$, 或者 $\xi\{I-KZ(\overline{KZ})'\}\bar{\xi}'=0$, 这与 $I-KZ(\overline{KZ})'>0$ 矛盾, 因而 $CZ+D$ 可逆.

(ii) 从 $\bar{A}A'=\bar{B}B'+I_m$ 知道 A 可逆. 若 $Z\bar{B}'+\bar{A}'$ 不可逆, 由于 $Z\bar{B}'+\bar{A}'=(Z\bar{B}'(\bar{A}')^{-1}+I_m)\bar{A}'$, 则 $Z\bar{N}'+I_m$ 不可逆, 这里 $N=A^{-1}B$. 因而存在非零向量 η, 使得 $\eta(Z\bar{N}'+I_m)=0$, 即 $\eta Z\bar{N}'=-\eta$, 因而 $\eta\bar{\eta}'=\eta Z\bar{N}'N\bar{Z}'\bar{\eta}'$, 即 $I_m-Z\bar{N}'N\bar{Z}'$ 非正定. 但容易看出

$$\begin{aligned}I_n-\bar{N}'N&=I_n-\bar{B}'(\bar{A}')^{-1}A^{-1}B=I_n-\bar{B}'(I_m+B\bar{B}')^{-1}B\\&=(I_n+\bar{B}'B)^{-1}>0.\end{aligned}$$

最后一个等式可直接验证而得. 于是

$$I_m-Z\overline{N}'N\overline{Z}'=I_m-Z\overline{Z}'+Z\overline{Z}'-Z\overline{N}'N\overline{Z}'$$
$$=I_m-Z\overline{Z}'+Z(I_n-\overline{N}'N)\overline{Z}'>0.$$

这与 $I_m-Z\overline{N}'N\overline{Z}'$ 非正定相矛盾. □

引理 3.4.4 设 A, B, C, D 如定理 3.4.2 所示，则它们满足的关系式 (1) 和下列等式等价：

$$\overline{A}'A-\overline{C}'C=I_m,\overline{A}'B=\overline{C}'D,\overline{B}'B-\overline{D}'D=-I_n. \tag{3}$$

证 命 $T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$，通过直接验证，(1) 等价于

$$\overline{T}\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}T'=\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}.$$

由此可见 T 可逆. 上式两端先取共轭，然后再取其逆得

$$(\overline{T}')^{-1}\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}T^{-1}=\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}=\overline{T}'\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}T.$$

直接计算即知它与 (3) 等价. □

定理 3.4.2 的证明 先证明 (2) 可改写为

$$W=(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}(Z\overline{D}'+\overline{C}'). \tag{4}$$

这只要证明

$$(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}(Z\overline{D}'+\overline{C}')=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

即

$$(Z\overline{B}'+\overline{A}')(AZ+B)=(Z\overline{D}'+\overline{C}')(CZ+D),$$

或者

$$Z(\overline{B}'A-\overline{D}'C)Z+(\overline{A}'A-\overline{C}'C)Z$$
$$+Z(\overline{B}'B-\overline{D}'D)+(\overline{A}'B-\overline{C}'D=O. \tag{5}$$

由(3)即知(5)成立. 现在从(4)得

$$\begin{aligned}I_m-W\overline{W}'&=I_m-(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}(Z\overline{D}'+\overline{C}')\\&\quad\cdot(D\overline{Z}'+C)(B\overline{Z}'+A)^{-1}\\&=(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}\{(Z\overline{B}'+\overline{A}')(B\overline{Z}'+A)\\&\quad-(Z\overline{D}'+\overline{C}')(D\overline{Z}'+C)\}(B\overline{Z}'+A)^{-1}\\&=(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}\{Z(\overline{B}'B-\overline{D}'D)\overline{Z}'\\&\quad+(\overline{A}'B-\overline{C}'D)\overline{Z}'+Z(\overline{B}'A-\overline{D}'C)\\&\quad+(\overline{A}'A-\overline{C}'C)\}\overline{((Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1})'}\\&=(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}(I_m-Z\overline{Z}')\overline{((Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1})'}.\end{aligned}$$

由此可见，从 $I_m-Z\overline{Z}'>0$，可得 $I_m-W\overline{W}'>0$，反之亦然. □

定理 3.4.5 Aut（R_1）中把 Z_0 变为 O 的变换是

$$W=A(Z-Z_0)(I-\overline{Z}'_0Z)^{-1}D^{-1},\tag{6}$$

其中 A 与 D 适合

$$A'\overline{A}=(I-\overline{Z}_0Z'_0)^{-1},D'\overline{D}=(I-Z'_0\overline{Z}_0)^{-1}.\tag{7}$$

证 由定理 3.4.2，变换

$$W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}\tag{8}$$

是 R_1 的一个全纯自同构，为了使它把 Z_0 变为 O，我们要求（AZ_0+B）（CZ_0+D）$^{-1}=O$，为此只要 $B=-AZ_0$，这时（1）变为

$$\overline{A}(I-\overline{Z}_0Z_0')A'=I_m,C'=-\overline{Z}_0D',\overline{D}(I-Z_0'\overline{Z}_0)D'=I_n.\tag{9}$$

从(9)即得(7)，把(9)代入(8)便得(6). □

3.4.3 $R_1(m,n)$的全纯自同构的行列式

把 Aut(R_1)中把 Z_0 变为 O 的变换记为 $W=\varphi_{Z_0}(Z)$. 下一步就可着手计算 $\det\varphi_{Z_0}(Z)$. 现在的困难是这里的 Z 和 W 都是$m\times n$ 矩阵，处理这一类问题需要新的技巧.

设 $w=F(z)$是把 $\mathbf{C}^n$ 中的域 Ω 映入 $\mathbf{C}^n$ 的全纯映射，它的分量为 $w_j=f_j(z_1,\cdots,z_n),j=1,\cdots,n$，易知

$$dw_j=\frac{\partial f_j}{\partial z_1}dz_1+\cdots+\frac{\partial f_j}{\partial z_n}dz_n,\quad j=1,\cdots,n.$$

若记 $dw=(dw_1,\cdots,dw_n)'$,$dz=(dz_1,\cdots,dz_n)'$,则有

$$dw = F'(z)dz.$$

因此若能把微分向量 dw, dz 写成 $dw=Adz$ 这种形式，那么 A 就是变换的 Jacobi 方阵. 下面我们将要遇到的是 $dW=PdZQ$ 这种形式的关系，其中 dW, dZ 是 $m\times n$ 矩阵，P 是 m 阶方阵，Q 是 n 阶方阵，要把这种关系写成向量形式的关系 $dw=Adz$，需要引进矩阵的直积的概念.

设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 分别为 m, n 阶方阵，定义 A, B 的直积为

$$A\times B=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & \cdots & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\ & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{11}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{nn} & \cdots & a_{1m}b_{n1} & \cdots & a_{1m}b_{nn} \\ & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1n} & \cdots & a_{mm}b_{11} & \cdots & a_{mm}b_{1n} \\ & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{m1}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{nn} & \cdots & a_{mm}b_{n1} & \cdots & a_{mm}b_{nn} \end{pmatrix},$$

它是 mn 阶方阵，它的每一行、每一列都用两个指标来表示，因此它的第 $(j\alpha)$ 行、第 $(k\beta)$ 列的元素为

$$c_{(j\alpha)(k\beta)}=a_{jk}b_{\alpha\beta}.$$

直积有下列基本性质：

(i) $\det(A\times I_n)=\det A^n$, $\det(I_m\times B)=\det B^m$.

(ii) 设 A, C 为 m 阶方阵，B, D 为 n 阶方阵，那么

$$(A\times B)(C\times D)=AC\times BD.$$

(iii) 设 A、B 分别是 m、n 阶方阵，那么

$$\det(A\times B)=\det A^n\det B^m. \tag{10}$$

证 (i) 直接从定义可得这两等式.

(ii) 用 $p_{(j\alpha)(k\beta)}$，$q_{(j\alpha)(k\beta)}$分别记 $A\times B$ 和 $C\times D$ 的元素，那么 $(A\times B)(C\times D)$ 的第 $(j\alpha)$ 行、第 $(k\beta)$ 列的元素为

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{n}p_{(j\alpha)(l\gamma)}q_{(l\gamma)(k\beta)}=\sum_{l=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{n}a_{jl}b_{\alpha\gamma}c_{lk}d_{\gamma\beta}$$
$$=\Big(\sum_{l=1}^{m}a_{jl}c_{lk}\Big)\Big(\sum_{\gamma=1}^{n}b_{\alpha\gamma}d_{\gamma\beta}\Big),$$

这就是 $AC\times BD$ 的第 $(j\alpha)$ 行、第 $(k\beta)$ 列的元素.

(iii) 从 (ii) 可得 $(A\times I_n)(I_m\times B)=A\times B$，再由 (i) 即得 (10)． □

引理 3.4.6 设 $m\times n$ 矩阵 X，Y 满足下列关系

$$Y=AXB, \tag{11}$$

其中 A，B 分别为 m 和 n 阶方阵. 如果把 X，Y 的元素排成行向量

$$x=(x_{11},\cdots,x_{1n},\cdots,x_{m1},\cdots,x_{mn}),$$
$$y=(y_{11},\cdots,y_{1n},\cdots,y_{m1},\cdots,y_{mn}).$$

那么 (11) 可写成 $y'=(A'\times B)'x'$.

证 从 (11) 可得

$$y_{j\alpha}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}a_{jk}x_{k\beta}b_{\beta\alpha}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}x_{k\beta}(a_{jk}b_{\beta\alpha}), \tag{12}$$

这里 $(a_{kj}b_{\beta\alpha})$ 正是 $A\times B$ 的第 $(k\beta)$ 行、$(j\alpha)$ 列的元素，因而 (12) 可用矩阵形式写成 $y=x(A'\times B)$，写成列向量就得 $y'=(A'\times B)'x'$. □

现在来计算 $\det\varphi'_{Z_0}(Z_0)$. 对变换

$$W=A(Z-Z_0)(I-\overline{Z}_0'Z)^{-1}D^{-1}$$

进行微分，注意到矩阵微分的两个基本等式

$$d(PQ)=dP\cdot Q+PdQ,\ dP^{-1}=-P^{-1}dPP^{-1},$$

即得

$$dW=A\{dZ(I-\overline{Z}_0'Z)^{-1}$$
$$-(Z-Z_0)(I-\overline{Z}_0'Z)^{-1}d(I-\overline{Z}_0'Z)(I-\overline{Z}_0'Z)^{-1}\}D^{-1}.$$

在上式中命 $Z=Z_0$，并注意到 $(I-\overline{Z}_0'Z_0)^{-1}=\overline{D}'D$,即得

$$dW=AdZ\overline{D}'. \tag{13}$$

现在把 dW，dZ 的元素排成下列两个列向量：

$$dw=(dw_{11},\cdots,dw_{1n},\cdots,dw_{m1},\cdots,dw_{mn})'$$

$$dz=(dz_{11},\cdots,dz_{1n},\cdots,dz_{m1},\cdots,dz_{mn})'.$$

根据引理 3.4.6，(13) 便可写成

$$dw=(A'\times\overline{D}')'dz.$$

这就是说

$$\varphi_{Z_0}'(Z_0)=(A'\times\overline{D}')'.$$

由直积的性质 (iii)，

$$\det\varphi_{Z_0}'(Z_0)=\det(A'\times\overline{D}')=\det A^n\det\overline{D}^m.$$

注意到 (7)，即得

$$|\det\varphi_{Z_0}'(Z_0)|^2=\det(A\overline{A}')^n\det(D\overline{D}')^m$$

$$=\det(I-Z_0\overline{Z}_0')^{-(m+n)}.$$

因而由定理 3.3.8 得

$$K_{\mathrm{I}}(Z,Z)=\frac{1}{V(R_{\mathrm{I}})}\frac{1}{\det(I-Z\overline{Z}')^{m+n}}.$$

再从命题 3.3.9 即得

定理 3.4.7 R_{I} 的核函数是

$$K_{\mathrm{I}}(Z,W)=\frac{1}{V(R_{\mathrm{I}})}\frac{1}{\det(I-Z\overline{W}')^{m+n}}.$$

用类似的方法，可以算得 R_{II}，R_{III}，R_{IV} 的核函数分别为

$$K_{\mathrm{II}}(Z,W)=\frac{1}{V(R_{\mathrm{II}})}\ \frac{1}{\det(I-Z\overline{W})^{n+1}},$$

$$K_{\mathrm{III}}(Z,W)=\frac{1}{V(R_{\mathrm{III}})}\ \frac{1}{\det(I+Z\overline{W})^{n-1}},$$

$$K_{\mathrm{IV}}(z,w)=\frac{1}{V(R_{\mathrm{IV}})}\ \frac{1}{(1+|zw'|^2-2z\overline{w}')^n}.$$

四类典型域的体积已由华罗庚教授 [Hua] 算出，它们分别是

$$V(R_{\mathrm{I}})=\frac{(m-1)!\ \cdots 2!\ 1!\ (n-1)!\ \cdots 2!\ 1!}{(m+n-1)!\ \cdots 2!\ 1!}\pi^{mn},$$

$$V(R_{\mathrm{II}})=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{n!}\frac{2!\ 4!\ \cdots\ (2n-2)!}{(n+1)!\ (n+2)!\ \cdots\ (2n-1)!},$$

$$V(R_{\mathrm{III}})=\pi^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{2!\ 4!\ \cdots\ (2n-4)!}{(n-1)!\ n!\ \cdots\ (2n-3)!},$$

$$V(R_{\mathrm{IV}})=\frac{\pi^n}{2^{n-1}n!}.$$

§ 3.5 Bergman 度 量

3.5.1 Bergman 度量方阵

Bergman 核函数的重要作用之一，是可以通过它在有界域上引进 Bergman 度量，它相当于单位圆盘上的 Poincaré 度量.

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$K(z,\zeta)$是 Ω 的核函数，记

$$T_{jk}(z,z)=\frac{\partial^2\log K(z,z)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k},\ j,\ k=1,\ \cdots,\ n,$$

称 $T=(T_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$为 Ω 的**度量方阵**. 容易看出 T 是一个 Hermite 方阵：$\overline{T}'=T$.

定理 3.5.1 有界域 Ω 的度量方阵 $T(z,z)$在 Ω 中每点都是正定的.

证 对于任意 $u\in\mathbf{C}^n$，$u\neq0$，我们要证明

$$uT(z,z)\bar{u}'=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(z,z)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}u_j\bar{u}_k>0,z\in\Omega.$$

因为 $K(z,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(z)}$,所以

$$\frac{\partial^2\log K}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}=\frac{1}{K}\frac{\partial^2K}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}-\frac{1}{K^2}\frac{\partial K}{\partial z_j}\frac{\partial K}{\partial\bar{z}_k}$$

$$=\frac{1}{K^2}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}|\varphi_l(z)|^2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_j}\overline{\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_k}}-\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_j}\overline{\varphi_l}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\varphi_l\overline{\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_k}}\right)\right\},$$

$$K^2\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K}{\partial z_j\partial\bar z_k}u_j\bar u_k=\sum_{l=0}^{\infty}|\varphi_l(z)|^2\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_j}u_j\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_k}u_k\right)}$$

$$-\left(\sum_{l=0}^{\infty}\bar\varphi_l\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_j}u_j\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\varphi_l\overline{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_k}u_k\right)}\right).$$

记 $a_l=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_j}u_j$，则上式可写为

$$K^2\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K}{\partial z_j\partial\bar z_k}u_j\bar u_k=\sum_{l=0}^{\infty}|\varphi_l(z)|^2\sum_{l=0}^{\infty}|a_l|^2-\left|\sum_{l=0}^{\infty}a_l\bar\varphi_l\right|^2\geqslant 0.\quad(1)$$

这里已经用了 Schwarz 不等式. 如果有某点 z 使等号成立，则有 $a_l=\lambda\varphi_l$，即

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_j}u_j=\lambda\varphi_l,\ l=0,\ 1,\ \cdots\qquad(2)$$

由 § 3.1 最后的说明知道，φ_l 在原点附近有展开式：

$$\varphi_0(z)=a_0^{(0)}+a_1^{(0)}z_1+\cdots+a_n^{(0)}z_n+\cdots,\qquad a_0^{(0)}\neq 0,$$

$$\varphi_1(z)=\qquad a_1^{(1)}z_1+\cdots+a_n^{(1)}z_n+\cdots,\qquad a_1^{(1)}\neq 0,$$

....

$$\varphi_n(z)=\qquad\qquad a_n^{(n)}z_n+\cdots,\qquad a_n^{(n)}\neq 0.$$

所以当 $l\geqslant 1$ 时，$\varphi_l(0)=0$，$\frac{\partial\varphi_l(0)}{\partial z_j}=a_j^{(l)}$，在 (2) 中命 $z=0$，得线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^{(l)}u_j=0,\ l=1,\ \cdots,\ n.$$

它的系数行列式为 $a_1^{(1)}\cdots a_n^{(n)}\neq 0$，因而 $u=0$，这说明 (1) 中等号不能成立，因而 $T(z,z)>0$. □

定理 3.5.2 设 Ω 和 Ω_1 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，双全纯映射 $w=f(z)$ 把 Ω 一一地映为 Ω_1，Ω 和 Ω_1 的度量方阵分别为 $T(z,z)$ 和 $T_1(w,w)$，那么

$$T(z,z)=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)'T_1(w,w)\overline{\left(\frac{df(z)}{dz}\right)}.\qquad(3)$$

证 设 Ω 和 Ω_1 的核函数分别为 $K(z,z)$ 和 $K_1(w,w)$，则

由定理 3.3.6，得

$$K(z,z)=K_1(w,w)\det\frac{df(z)}{dz}\ \overline{\det\frac{df(z)}{dz}},$$

取对数得

$$\log K(z,z)=\log K_1(w,w)+\log\det\frac{df(z)}{dz}+\log\overline{\det\frac{df(z)}{dz}}.$$

注意到右端第二项是 z 的全纯函数，第三项是 $\bar{z}$ 的全纯函数，因而

$$\frac{\partial^2\log K(z,z)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}=\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial^2\log K_1(w,w)}{\partial w_p\partial\overline{w}_q}\frac{\partial w_p}{\partial z_j}\overline{\frac{\partial w_q}{\partial z_k}}.$$

这就是 (3). □

3.5.2 Bergman 度量

根据定理 3.5.1，我们给出下面的

定义 3.5.3 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$K(z,z)$是它的核函数，称

$$ds^2=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(z,\ z)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}dz_jd\bar{z}_k=dzT(z,\ z)\overline{dz}'$$

为域 Ω 的 **Bergman 度量.**

两个全纯等价域上的 Bergman 度量有下面的关系.

定理 3.5.4 设 Ω 和 Ω_1 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，双全纯映射 $w=f(z)$ 把 Ω 一一地映为 Ω_1，Ω 和 Ω_1 的度量方阵分别为 $T(z,z)$ 和 $T_1(w,w)$，那么

$$dz\ T(z,\ z)\ \overline{dz}'=dwT_1(w,w)\overline{dw}'.$$

证 由定理 3.5.2，

$$T(z,\ z)=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)'T_1(w,w)\overline{\left(\frac{df(z)}{dz}\right)}.$$

注意到

$$dw=dz\left(\frac{df(z)}{dz}\right)',\ \overline{dw}'=\overline{\frac{df(z)}{dz}}\overline{dz}',$$

所以

$$dwT_1(w,w)\overline{dw}' = dz\left(\frac{df(z)}{dz}\right)' T_1(w,w)\overline{\left(\frac{df(z)}{dz}\right)}\overline{dz}'$$

$$= dz\, T(z, z)\, \overline{dz}'. \quad \square$$

由此立刻可得

推论 3.5.5 有界域 Ω 上的 Bergman 度量在 Ω 的全纯自同构下不变.

通过 Bergman 度量可以定义曲线在 Bergman 度量下的长度，以及 Ω 中两点在 Bergman 度量下的距离.

定义 3.5.6 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$T(z,z)$是它的度量方阵，γ: $[0, 1] \to \Omega$ 是 Ω 中的 C^1 曲线，定义 γ 的 Bergman 长度为

$$|\gamma|_{B(\Omega)} = \int_0^1 \{\gamma'(t)T(\gamma(t),\gamma(t))\overline{(\gamma'(t))}'\}^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \int_0^1 \left\{\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \log K(\gamma(t),\gamma(t))}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\gamma_j'(t)\overline{\gamma_k'(t)}\right\}^{\frac{1}{2}} dt.$$

定义 3.5.7 设 z, w 是 Ω 中两点，Ω 中连接 z, w 的 C^1 曲线的全体记为 Q，即

$$Q = \{\gamma: [0, 1] \to \Omega \text{ 是 } C^1 \text{ 曲线}; \ \gamma(0)=z, \ \gamma(1)=w\}.$$

z, w 的 Bergman 距离 $\delta_{B(\Omega)}(z,w)$定义为

$$\delta_{B(\Omega)}(z,w) = \inf\{|\gamma|_{B(\Omega)} : \gamma \in Q\}.$$

从定理 3.5.4 立刻得到下面的

定理 3.5.8 设 Ω 和 Ω_1 是 $\mathbf{C}^n$ 中两个有界域，$w=f(z)$ 把 Ω 一一地映为 Ω_1.

(i) 设 γ: $[0, 1] \to \Omega$ 是 Ω 中的 C^1 曲线，那么

$$|\gamma|_{B(\Omega)} = |f(\gamma)|_{B(\Omega_1)};$$

(ii) 设 z, w 是 Ω 中任意两点，那么

$$\delta_{B(\Omega)}(z,w) = \delta_{B(\Omega_1)}(f(z),f(w)).$$

推论 3.5.9 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，$f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

(i) 对于 Ω 中任意 C^1 曲线 γ，$|\gamma|_{B(\Omega)} = |f(\gamma)|_{B(\Omega)}$;

(ii) 设 z，w 是 Ω 中任意两点，那么

$$\delta_{B(\Omega)}(z,w)=\delta_{B(\Omega)}(f(z),f(w)).$$

已知单位球 B_n 的核函数 $K(z,z)=\frac{n!}{\pi^n}(1-|z|^2)^{-(n+1)}$，容易直接算出 B_n 的 Bergman 度量为

$$ds^2=\frac{n+1}{(1-|z|^2)^2}\{(1-|z|^2)|dz|^2+|\langle z,dz\rangle|^2\}.$$

当 $n=1$ 时，即单位圆盘的 Bergman 度量为

$$ds^2=\frac{2|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

它就是通常的 Poincaré 度量.

[注记]

本章的大部分内容是属于 S. Bergman [Be] 的. 华罗庚教授 [Hua] 用两种方法计算出四类典型域的 Bergman 核函数：一种是通过群表示论的方法，直接算出四类典型域上完备的规范正交系，从而得到核函数；另一种是通过四类典型域的全纯自同构来计算它们的核函数. 我们采用了第二种方法. 由于只有极少数的几类域的 Bergman 核函数能精确地计算出来，因此对于 Bergman 核函数的渐近性质的了解显得特别重要. 这方面的一项重要工作已由C. Fefferman完成. 关于这方面的材料，有兴趣的读者可参阅 [Fe].

本章的内容可参阅 [Hua]，[Lu 1，2，3] 和 [Kr].

第四章 Cauchy 积分公式

§4.1 球的 Cauchy 积分公式

4.1.1 球的 Cauchy 积分公式

设 D 是平面上的有界域，它的边界由逐段光滑的 Jordan 曲线组成．如果 f 在 D 中全纯，在 $\overline{D}$ 上连续，那么对每点 $z\in D$，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

这就是单复变数函数的 Cauchy 积分公式，它的重要性是众所周知的．

在§1.2中，我们已经证明了多圆柱的 Cauchy 积分公式，在这一节我们要给出球的 Cauchy 积分公式．

对单位圆盘的 Cauchy 积分公式作变换 $\zeta=e^{i\theta}$，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)}{1-z\overline{\zeta}}\;d\theta,$$

这里 $\frac{1}{1-z\overline{\zeta}}$ 称为单位圆盘的 Cauchy 核．

定义 $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$ 上的函数

$$C(z,\zeta)=\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n}$$

为 $\mathbf{C}^n$ 中单位球 B 的 Cauchy 核．

设 $f\in L^1(\sigma)$，从 $C(z,\zeta)$ 可以产生一个新函数

$$C[f](z)=\int_{\partial B}C(z,\zeta)f(\zeta)d\sigma(\zeta),z\in B,$$

称 $C[f]$ 为 f 的 Cauchy 积分.

称 $A(B)=H(B)\cap C(\overline{B})$ 为**球代数**.

定理 4.1.1 (Cauchy 积分公式) 设 $f\in A(B)$，则对 $z\in B$ 有

$$f(z)=\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n}d\sigma(\zeta).$$

证 分两步来做.

(一) 设 $z\in B$，假定 $z=(z',0)$，其中 $z'=(z_1,\cdots,z_{n-1})$. 定义 $g(w)=C(z,w)f(w)$，$w\in\overline{B}$. 由于 $z_n=0$，所以

$$C(z,w)=\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^n}$$

$$=\frac{1}{(1-\langle z',w'\rangle)^n},$$

$$w'=(w_1,\cdots,w_{n-1}),$$

它恰好是 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中单位球 B_{n-1} 的 Bergman 核函数 $K(z',w')$ (和例 3.3.7 比较差一常数因子). 由定理 3.3.2 得

$$f(z)=f(z',0)=\int_{B_{n-1}}K(z',\zeta')f(\zeta',0)d\nu_{n-1}(\zeta')$$

$$=\int_{B_{n-1}}g(\zeta',0)d\nu_{n-1}(\zeta'). \tag{1}$$

因为 $z_n=0$，$C(z,w)$ 中不出现 $\overline{w}_n$，所以 $g(w)$ 是 w_n 的全纯函数，故当 $\zeta=(\zeta',\zeta_n)\in\partial B_n$ 时，根据中值公式有

$$g(\zeta',0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\zeta',e^{i\theta}\zeta_n)d\theta.$$

把它代入 (1) 并利用定理 1.4.4 (ii)，即得

$$f(z)=\int_{B_{n-1}}d\nu_{n-1}(\zeta')\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\zeta',e^{i\theta}\zeta_n)d\theta$$

$$=\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n}.$$

(二) 设 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in B$，$z_n\neq 0$，适当选取酉方阵 U，

使得 $zU^{-1}=(\xi',0)=\xi$，这里 $\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$．于是

$$\int_{\partial B}C(z,\zeta)f(\zeta)d\sigma(\zeta)=\int_{\partial B}C(\xi U,\zeta)f(\zeta)d\sigma(\zeta). \tag{2}$$

对右端积分作变换 $\zeta=\eta U$，并注意到 σ 的旋转不变性有

$$\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(1-\langle\xi U,\zeta\rangle)^n}=\int_{\partial B}\frac{f(\eta U)d\sigma(\eta)}{(1-\langle\xi U,\eta U\rangle)^n}$$

$$=\int_{\partial B}\frac{f(\eta U)d\sigma(\eta)}{(1-\langle\xi,\eta\rangle)^n}. \tag{3}$$

综合 (2)、(3) 并利用（一）的结果，即得

$$\int_{\partial B}C(z,\zeta)f(\zeta)d\sigma(\zeta)=\int_{\partial B}C(\xi,\eta)f(\eta U)d\sigma(\eta)$$

$$=f(\xi U)=f(z).$$

这就是要证明的．□

值得一提的是，这个并不复杂的积分公式首先由华罗庚教授 [Hua] 在本世纪 50 年代中期得到，它是更广泛的典型域的 Cauchy 积分公式的一个特殊情形，1964 年又被 Bungart [Bu] 重新证明．

4.1.2 Schwarz 公式

像单复变一样，我们也有用 f 的实部表示 f 的 Schwarz 公式．

定理 4.1.2 设 $f\in A(B)$，$u=\mathrm{Re}f$，$f(0)$是实数，那么对 $z\in B$，有

$$f(z)=\int_{\partial B}\{2C(z,\zeta)-1\}u(\zeta)d\sigma(\zeta). \tag{4}$$

证 不妨假定 $f(0)=0$，则由 Cauchy 积分分式 $\int_{\partial B}f(\zeta)d\sigma(\zeta)=f(0)=0$，于是

$$\int_{\partial B}u(\zeta)d\sigma(\zeta)=\frac{1}{2}\left(\int_{\partial B}f(\zeta)d\sigma(\zeta)+\int_{\partial B}\overline{f}(\zeta)d\sigma(\zeta)\right)=0.$$

这样 (4) 的右端可写为

$$\int_{\partial B}\{2C(z,\zeta)-1\}u(\zeta)d\sigma(\zeta)=\int_{\partial B}C(z,\zeta)(2u(\zeta))d\sigma(\zeta)$$
$$=C[f](z)+C[\bar{f}](z)$$
$$=f(z)+C[\bar{f}](z).$$

我们证明 $C[\bar{f}](z)=0$. 为此命 $g(w)=C(w,z)f(w)$, 则 $g\in A(B)$且 $g(0)=0$, 于是 $\int_{\partial B}gd\sigma=0$. 因而

$$C[\bar{f}](z)=\int_{\partial B}C(z,w)\overline{f(w)}d\sigma(w)$$
$$=\int_{\partial B}\overline{C(w,z)}\,\overline{f(w)}d\sigma(w)$$
$$=\overline{\int_{\partial B}g(w)d\sigma(w)}=0.$$

证明完毕 . □

比较定理 1.2.1 和定理 4.1.1，我们发现多圆柱的 Cauchy 积分公式和球的 Cauchy 积分公式是不一样的，这显示出单复变和多复变的又一本质性的差别 . 在单复变中，所有有界域的 Cauchy 核都是一样的 . 而在多复变中，Cauchy 核却因域而异 .

§4.2 特征边界上的规范正交系

4.2.1 域的特征边界

在讨论一般域上的 Cauchy 积分公式之前，先来分析一下单位圆盘的情形，这时的 Cauchy 积分公式是

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}z}d\theta,$$

它的 Cauchy 核是$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}$, $\zeta=e^{i\theta}$, 因为$|\bar{\zeta}z|<1$, 把它展开成幂级数得

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\overline{\zeta}z}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(\overline{\zeta}z)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^k\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\zeta}^k\right).$$

容易看出$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^k\right\}$是$(L^2\cap H)(U)$中的完备正交系，当$z$取圆周上的值$\zeta$时，$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\zeta^k\right\}$是单位圆周上的规范正交系．因此，单位圆盘的 Cauchy 核可以通过下述途径得到：在$|z|<1$中取一组完备正交系$\{\varphi_k(z)\}$（不一定是规范的），当z取圆周上的值ζ时，$\{\varphi_k(\zeta)\}$是$|\zeta|=1$上的规范正交系（但不一定是完备的），由它们即可产生 Cauchy 核如下：

$$C(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}.$$

对 Cauchy 核的这种看法，有可能把 Cauchy 积分公式推广到一般的域．

在多圆柱的 Cauchy 积分公式中，我们已经看到，积分并不是在多圆柱的整个边界上进行的，而是在维数最低的那部分边界上进行的，我们称它为特征边界．这种现象不是多圆柱独有的，另外一些域也有类似的情形．这正是多复变和单复变的本质差异之一．现在给出一般域Ω的特征边界的定义．

定义 4.2.1 设Ω是$\mathbf{C}^n$中的域，如果Ω的边界的一部分$S\subset\partial\Omega$具有下列性质：每个$H(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$中的函数都在$S$上取最大模，并且对$S$上任一点一定有$\Omega$中的全纯函数在该点取最大模，我们就称$S$为$\Omega$的**特征边界**．

我们对单位多圆柱U^n的特征边界

$$\partial_0U^n=\{z=(z_1,\cdots,z_n):|z_1|=1,\cdots,|z_n|=1\}$$

来验证上面的性质．

任取$f\in H(U^n)\cap C(\overline{U}^n)$，根据最大模原理，它的最大模必定

在 ∂U^n 上取到．我们证明，f 的最大模只能在 $\partial_0 U^n$ 上取到．事实上，如果 f 在某点 $\zeta\in\partial U^n-\partial_0 U^n$ 上取到最大模，这里不妨设 $|\zeta_1|<1$，$|\zeta_2|=1$，…，$|\zeta_n|=1$. 这时把 z_2，…，z_n 看作参数，则 $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 可以看成是 z_1 的全纯函数族．由于它在 $\overline{U}^n$ 上连续，因而有界，故是一正规族．因而

$$f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=\lim_{\substack{z_2\to\zeta_2\\ \cdots\\ z_n\to\zeta_n}} f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$$

是 z_1 在单位圆盘 $|z_1|<1$ 中的全纯函数．根据单复变数函数的最大模原理，它不可能在 ζ_1 处取到最大模．因而 f 的最大模只能在 $\partial_0 U^n$ 上取到．今任取 $\zeta\in\partial_0 U^n$，任取 $f\in H(U^n)\cap C(\overline{U}^n)$，设 f 在某点 $\eta\in\partial_0 U^n$ 取到最大模，取 $\varphi\in\mathrm{Aut}\ (U^n)$，使得 $\varphi\ (\zeta)\ =\eta$，若命 $g=f\circ\varphi$，则 g 必在 ζ 处取最大模．

4.2.2　特征边界上的规范正交系

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，S 是它的特征边界．根据对单复变数 Cauchy 核的分析，我们希望找到 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中的完备正交系 $\{\varphi_k(z)\}$，它在 S 上是规范正交的．由这组函数系就有可能产生 Ω 的 Cauchy 核．下面我们将证明，对 Ω 附加一定的条件，这样的函数系是存在的．

定理 4.2.2　设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界圆型域，它的特征边界 S 也是圆型的．那么存在函数系

$$\{\psi_{kl}\},k=0,1,\cdots;l=1,\cdots,m_k,m_k=\binom{n-k-1}{k}$$

满足下列条件：

(i) 每个 $\psi_{kl}(z)(l=1,\ \cdots,\ m_k)$ 是 z 的 k 次齐次多项式；

(ii) $\{\psi_{kl}\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中的完备正交系；

(iii) $\{\psi_{kl}(\zeta)\}$ 是 S 上的规范正交系，即

$$\int_S \psi_{kj}(\zeta)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}d\mu(\zeta)=\delta_{jl},$$

$$\int_S \psi_{hj}(\zeta)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}d\mu(\zeta)=0, h\neq k,$$

这里 $d\mu$ 是 S 上的 Lebesgue 测度．

证　在证明定理 3.2.2 时，我们已经构造出这样的函数系，它们在 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中是完备规范正交的，为了使这组函数系在 S 上是规范正交的，需要一些新的技巧．和证明定理 3.2.2 时一样，命

$$z^{[k]}=\left\{\sqrt{\frac{k!}{\alpha!}}z^\alpha:|\alpha|=k\right\},$$

$z^{[k]}$是一个 m_k 维向量．这里和证明定理 3.2.2 时不同的是，在 z^α 前加了一个系数$\sqrt{\frac{k!}{\alpha!}}$．这是证明定理 4.2.3 时需要的．命

$$H_k=\int_\Omega z^{[k]'}\bar{z}^{[k]}dm_{2n}(z),$$

则 H_k 是 m_k 阶正定的 Hermite 方阵，写 $H_k=A_k'\bar{A}_k$，并记 $\varphi^{[k]}(z)=z^{[k]}A_k^{-1}$，则 $\varphi^{[k]}$是 m_k 维向量，若写

$$\varphi^{[k]}(z)=(\varphi_{k1},\cdots,\varphi_{km_k}),$$

则由定理 3.2.2 所证，$\{\varphi_{kl}\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$ 中一组完备的规范正交系．现在记

$$\varphi^{[k]}(\zeta)=(\varphi_{k1}(\zeta),\cdots,\varphi_{km_k}(\zeta)),\zeta\in S,$$

$$\int_S(\varphi^{[k]}(\zeta))'\overline{(\varphi^{[k]}(\zeta))}d\mu(\zeta)=G_k,$$

则 G_k 是正定的 Hermite 方阵，故存在 m_k 阶酉方阵 U_k，使得 $\overline{U}_k'G_kU_k=\Lambda_k$，这里 Λ_k 为对角线元素 β_{k1}，…，β_{km_k}都取正值的对角线方阵．由此即得

$$\int_S(\varphi^{[k]}(\zeta)\overline{U}_k)'\overline{(\varphi^{[k]}(\zeta)\overline{U}_k)}d\mu(\zeta)=\Lambda_k.$$

记 $\varphi^{[k]}(z)\overline{U}_k=(\tilde{\varphi}_{k1}(z),\ \cdots,\ \tilde{\varphi}_{km_k}(z))$，并记

$$
\begin{aligned}
\psi^{[k]}(z) &= \varphi^{[k]}(z)\overline{U}_k\Lambda_k^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{\tilde{\varphi}_{k1}(z)}{\sqrt{\beta_{k1}}},\cdots,\frac{\tilde{\varphi}_{km_k}(z)}{\sqrt{\beta_{km_k}}}\right) \\
&= (\psi_{k1}(z),\cdots,\psi_{km_k}(z)),
\end{aligned}
$$

则 $\{\psi_{kl}(z)\}$，$k=0,1,\cdots;\ l=1,\cdots,m_k$ 就是所求的函数系．事实上，(i) 成立是显然的．由于

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega (\varphi^{[k]}(z)\overline{U}_k)'\ \overline{(\varphi^{[k]}(z)\overline{U}_k)}dm_{2n}(z) \\
&= \overline{U}'_k\int_\Omega(\varphi^{[k]}(z))'\ \overline{\varphi^{[k]}(z)}dm_{2n}(z)U_k \\
&= I_{m_k}.
\end{aligned}
$$

又因不同次数的齐次多项式在 Ω 上是正交的，所以 $\{\psi_{kl}(z)\}$ 是 $(L^2\cap H)(\Omega)$上的完备正交系，但不规范，即 (ii) 成立．由于

$$
\begin{aligned}
&\int_S (\psi^{[k]}(\zeta))'\ \overline{\psi^{[k]}(\zeta)}d\mu(\zeta) \\
&= \Lambda_k^{-\frac{1}{2}}\int_S(\varphi^{[k]}(\zeta)\overline{U}_k)'\ \overline{(\varphi^{[k]}(\zeta)\overline{U}_k)}d\mu(\zeta)\Lambda_k^{-\frac{1}{2}} \\
&= I_{m_k},
\end{aligned}
$$

再利用 S 是圆型的性质，当 $k\neq j$ 时，$\psi^{[k]}$的任一分量和 $\psi^{[j]}$的任一分量在 S 上都是正交的，因而 $\{\psi_{kl}\}$ 在 S 上是规范正交的，即 (iii) 成立．□

4.2.3 特征边界上的规范正交系的重要性质

定理 4.2.2 构造的这组正交系有下列重要性质：

定理 4.2.3 如果域 Ω 和它的特征边界 S 满足定理 4.2.2 的条件，而且 S 上任意两点可以通过酉变换相互变换，那么等式

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m_k}|\psi_{kl}(\zeta)|^2r^k=\frac{1}{V(S)}\frac{1}{(1-r)^n}
$$

对 $\zeta\in S$，$0\leqslant r\leqslant r_0<1$ 一致成立，其中 $V(S)$ 记 S 的体积．

证 我们先证明 $\sum_{l=1}^{m_k}|\psi_{kl}(\zeta)|^2$ 是一个与 ζ 无关的常数．事实上

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{m_k}|\psi_{kl}(\zeta)|^2 &= \psi^{k}(\zeta)\,\overline{(\psi^{k}(\zeta))'}\\
&= \varphi^{[k]}(\zeta)\overline{U}_k\Lambda_k^{-1}U'_k\,\overline{\varphi^{[k]}(\zeta)'}\\
&= \varphi^{[k]}(\zeta)\overline{G}_k^{-1}\,\overline{\varphi^{[k]}(\zeta)'}\\
&= \varphi^{[k]}(\zeta)\left(\int_S\overline{\varphi^{[k]}(\eta)'}\,\varphi^{[k]}(\eta)d\mu(\eta)\right)^{-1}\overline{\varphi^{[k]}(\zeta)'}\\
&= \zeta^{[k]}A_k^{-1}\left(\int_S\overline{(\eta^{[k]}A_k^{-1})'}\,(\eta^{[k]}A_k^{-1})d\mu(\eta)\right)^{-1}\overline{\zeta^{[k]}A_k^{-1\prime}}\\
&= \zeta^{[k]}\left(\int_S\overline{\eta^{[k]'}}\,\eta^{[k]}d\mu(\eta)\right)^{-1}\overline{\zeta^{[k]'}}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

任取 $\xi\in S$，则有酉变换 U，使得 $\zeta=\xi U$. 从多项式公式

$$
(x_1+\cdots+x_n)^k=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},
$$

可以算得

$$
\begin{aligned}
(\xi\overline{\xi}')^k &= (\xi_1\overline{\xi}_1+\cdots+\xi_n\overline{\xi}_n)^k\\
&= \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\xi^\alpha\overline{\xi}^\alpha\\
&= \xi^{[k]}\,\overline{\xi^{[k]'}}.
\end{aligned}
$$

$(\zeta\overline{\zeta}')^k=\zeta^{[k]}\overline{\zeta^{[k]'}}$．因为 $\zeta\overline{\zeta}'=\xi\overline{\xi}'$，所以 $\xi^{[k]}\overline{\xi^{[k]'}}=\zeta^{[k]}\overline{\zeta^{[k]'}}$．从而存在 m_k 阶酉方阵 $U^{[k]}$，使得 $\zeta^{[k]}=\xi^{[k]}U^{[k]}$. 于是（1）的右端可以写成

$$
\begin{aligned}
&\xi^{[k]}\left\{\int_S(\overline{\eta}^{[k]}\overline{U^{[k]'}})'\,(\eta^{[k]}\,\overline{U^{[k]'}})d\mu(\eta)\right\}^{-1}\overline{\xi^{[k]'}}\\
&= \xi^{[k]}\left\{\int_S\overline{\eta^{[k]'}}\,\eta^{[k]}d\mu(\eta)\right\}^{-1}\overline{\xi^{[k]'}},
\end{aligned}
$$

这里我们已经利用了测度 $d\mu$ 的酉不变性．这就证明了(1)和 ζ 无关．现在来计算这个常数 h．(1) 右端对 ζ 在 S 上积分得

$$V(S)h = \int_S \zeta^{[k]} Q \overline{\zeta^{[k]'}} d\mu(\zeta) = \sum_{i,j=1}^{m_k} q_{ij} \int_S \zeta^{(i)} \overline{\zeta^{(j)}} d\mu(\zeta),$$

这里 $Q=\left(\int_S \overline{\eta^{[k]'}}\ \eta^{[k]} d\mu(\eta)\right)^{-1}=(q_{ij})$、$\zeta^{(i)}$是$\zeta^{[k]}$的第 i 个分量．如果记 $P=\int_S \overline{\zeta^{[k]'}}\ \zeta^{[k]} d\mu(\zeta)=(p_{ij})$，那么 $PQ=I_{m_k}$．于是

$$\begin{aligned} V(S)h &= \sum_{i,j=1}^{m_k} q_{ij} p_{ji} = \mathrm{tr}(PQ) \\ &= \mathrm{tr}(I_{m_k}) = \binom{n+k-1}{k}. \end{aligned}$$

由此得

$$\sum_{l=1}^{m_k} |\psi_{kl}(\zeta)|^2 = \frac{1}{V(S)} \binom{n+k-1}{k}.$$

因而

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{m_k} |\psi_{kl}(\zeta)|^2 r^k &= \frac{1}{V(S)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} r^k \\ &= \frac{1}{V(S)} \frac{1}{(1-r)^n}. \end{aligned}$$

收敛的一致性在计算过程中已经证明．□

注意，这个定理的背景是十分明显的．因为在单位圆盘的情形，$\psi_k(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\zeta^k$，$|\zeta|=1$，因而

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \zeta^k \right|^2 r^k &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} r^k \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

定理 4.2.4 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{kl}(\zeta)\overline{\psi_{kl}(\eta)}r^k$$

对 ζ，$\eta\in S$ 及 $0\leqslant r\leqslant r_0<1$ 一致绝对收敛．

证 由 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{m_k}|\psi_{kl}(\zeta)\overline{\psi_{kl}(\eta)}|r^k\\ \leqslant&\Big(\sum_{l=1}^{m_k}|\psi_{kl}(\zeta)|^2r^k\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{l=1}^{m_k}|\psi_{kl}(\eta)|^2r^k\Big)^{\frac{1}{2}},\\ \leqslant&\frac{1}{2}\Big\{\sum_{l=1}^{m_k}|\psi_{kl}(\zeta)|^2r^k+\sum_{l=1}^{m_k}|\psi_{kl}(\eta)|^2r^k\Big\}.\end{aligned}$$

再用定理 4.2.3 即得所要证明的结论．□

定理 4.2.5 设 Ω 是一个圆型的星形域，记

$$\Omega_r=\{rz:z\in\Omega,0<r<1\},$$

那么级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m_k}\psi_{kl}(z)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}$ 对 $z\in\overline{\Omega}_r$ 及 $\zeta\in S$ 一致收敛．

证 因为 $f\in H(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ 的最大模在 Ω 的特征边界 S 上取到，且当 $z\in\Omega_r$ 时，$\frac{1}{r}z\in\Omega$. 于是根据 ψ_{kl} 的 k 次齐次性及定理 4.2.4 即得

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=N}^{N'}\sum_{l=1}^{m_k}\psi_{kl}(z)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}\Big|&=\Big|\sum_{k=N}^{N'}\sum_{l=1}^{m_k}\psi_{kl}\Big(\frac{1}{r}z\Big)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}r^k\Big|\\ &\leqslant\sup_{\xi\in S}\Big|\sum_{k=N}^{N'}\sum_{l=1}^{m_k}\psi_{kl}(\xi)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}r^k\Big|\to0,N,N'\to\infty.\end{aligned}$$

定理证毕．□

§4.3 有界星形圆型域的 Cauchy 积分公式

4.3.1 Cauchy 核与 Cauchy 积分公式

设 Ω 是包含原点的有界星形圆型域，S 是它的特征边界，并且具有 §4.2 提到的性质．在 §4.2 中，我们已经构造出一个函数

系

$$\{\psi_{kl}\}, \ k=0, 1, \cdots; \ l=1, \cdots, m_k,$$

它们在 Ω 上是完备正交的，在 S 上是规范正交的，而且

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m_k}\psi_{kl}(z)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}$$

对 $z\in\Omega$, 及 $\zeta\in S$ 一致收敛．在这个基础上，我们给出

定义 4.3.1 我们称

$$C(z, \zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m_k}\psi_{kl}(z)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}, \ z\in\Omega, \ \zeta\in S$$

为域 Ω 的 Cauchy 核．

从定理 4.2.5 知道，$C(z, \zeta)$ 作为 z 的函数在 Ω 上是全纯的．

下面是域 Ω 上的 Cauchy 积分公式．

定理 4.3.2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中包含原点的有界星形圆型域，它的特征边界 S 是圆型的，而且 S 上任意两点可以通过酉变换相互变换．如果 $f\in H(\Omega)\cap C(\Omega\cup S)$，那么

$$f(z)=\int_S C(z,\zeta)f(\zeta)d\mu(\zeta).$$

证 因为 f 在 S 上连续，故

$$g(z)=\int_S f(\zeta)C(z,\zeta)d\mu(\zeta)$$

是 Ω 上的全纯函数．由定理 4.2.4 知，当 z 固定时，级数$C(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m_k}\psi_{kl}(z)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}$对 $\zeta\in S$ 一致收敛，因而

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m_k}\psi_{kl}(z)\int_S f(\zeta)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}d\mu(\zeta).$$

若记 $b_{kl}=\int_S f(\zeta)\overline{\psi_{kl}(\zeta)}d\mu(\zeta)$，则

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m_k}b_{kl}\psi_{kl}(z).$$

另外，f 在 Ω 上有展开式

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}\psi_{kl}(z).$$

命 $z=r\eta$，$0<r<1$，$\eta\in S$，则因 ψ_{kl}是 k 次齐次多项式，

$$f(r\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}r^k\psi_{kl}(\eta),$$

所以

$$a_{kl}r^k=\int_S f(r\eta)\overline{\psi_{kl}(\eta)}d\mu(\eta).$$

于是

$$|b_{kl}-a_{kl}r^k|\leqslant\int_S|f(\eta)-f(r\eta)||\psi_{kl}(\eta)|d\mu(\eta)$$

记 $M_{kl}=\sup\limits_{\eta\in S}|\psi_{kl}(\eta)|$，上式为

$$|b_{kl}-a_{kl}r^k|\leqslant M_{kl}\int_S|f(\eta)-f(r\eta)|d\mu(\eta)$$

注意到 f 在 S 上连续，S 是紧的，故当 $r\to1$ 时，上式右端趋于 0．由此得 $a_{kl}=b_{kl}$，即

$$f(z)=g(z)=\int_S C(z,\zeta)f(\zeta)d\mu(\zeta).\qquad\square$$

这就是一般星形圆型域的 Cauchy 积分公式．

4.3.2 由域的自同构计算 Cauchy 核

和 Bergman 核函数的情形一样，对于不同的正交系，产生的 Cauchy 核是否不同？即 Cauchy 核是否依赖于正交系的选取？在下面的条件下，核的选取是唯一的．

定理 4.3.3 设 $\{\omega_k(\zeta)\}$ 是 S 上的一组规范正交系，且满足：

(i) $\omega_k(z)$，$k=0,1,\cdots$ 在 $\Omega\cup S$ 上全纯；

(ii) 级数 $C_1(z,\zeta)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\omega_k(z)\overline{\omega_k(\zeta)}$ 当 $\zeta\in S$，z 在 Ω 中任一紧集上一致收敛；

(iii) 任一 $f\in H(\Omega\cup S)$ 能展为 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\omega_k(z)$，且在 Ω 中内闭一致收敛．

那么 $\quad C_1(z,\zeta)=C(z,\zeta)$.

证 对于满足上述条件的正交系，定理 4.3.2 成立，因而

$$f(z)=\int_S C_1(z,\zeta)f(\zeta)d\mu(\zeta) \tag{1}$$

对每个 $f\in H(\Omega\cup S)$ 成立．固定 $w\in\Omega$，用证明定理 4.2.4 的方法可以证明级数 $\sum_{k,l}\psi_{kl}(z)\overline{\psi_{kl}(w)}$ 对 $z\in\Omega\cup S$ 一致收敛，因而 $C(z,w)$ 在 $\Omega\cup S$ 上全纯．在(1)中取 $f(z)=C(z,w)$，即得

$$C(z,w)=\int_S C_1(z,\zeta)C(\zeta,w)d\mu(\zeta). \tag{2}$$

对 $C_1(w,z)$ 用定理 4.3.2 得

$$C_1(w,z)=\int_S C_1(\zeta,z)C(w,\zeta)d\mu(\zeta),$$

取共轭，

$$C_1(z,w)=\int_S C_1(z,\zeta)C(\zeta,w)d\mu(\zeta). \tag{3}$$

比较 (2)，(3) 即得 $C(z,w)=C_1(z,w)$，让 $w\to\zeta\in S$ 即得所欲证者．□

当 Ω 是可递域时，Cauchy 核也可不通过正交系来求得．

定理 4.3.4 设 Ω 和 S 均如上所述．如果 Ω 是可递的，$\mathrm{Aut}(\Omega)$中的变换在 S 上全纯，且把 S 变为自己，那么 Ω 的 Cauchy 核为

$$C(z,\zeta)=\frac{1}{V(S)}(\det\varphi'_z(z))^{\frac{1}{2}}\overline{(\det\varphi'_z(\zeta))}^{\frac{1}{2}},$$

这里 $\varphi_z\in\mathrm{Aut}(\Omega)$且满足 $\varphi_z(z)=0$.

证 用 φ_a 记 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 中把 a 点变为原点的全纯自同构．按假定它把 S 变为 S，若记 $\eta=\varphi_z(\zeta)$，则 S 上体积元素的变换关系为

$$d\mu(\eta)=|\det\varphi'_a(\zeta)|d\mu(\zeta).$$

为简便计，记 S 上的规范正交系为 $\{\psi_k(\zeta)\}$. 于是

$$\int_S \psi_k(\eta)\overline{\psi_l(\eta)}d\mu(\eta)$$

$$=\int_S \psi_k(\varphi_a(\zeta))\overline{\psi_l(\varphi_a(\zeta))}|\det\varphi'_a(\zeta)|d\mu(\zeta)=\delta_{kl}.$$

这说明

$$\omega_k(\zeta)=\psi_k(\varphi_a(\zeta))(\det\varphi_a'(\zeta))^{\frac{1}{2}}$$

也是 S 上的规范正交系．我们证明 $\{\omega_k(\zeta)\}$ 满足定理 4.3.3 的条件．显然条件 (i)、(ii) 是成立的．为了证明 (iii)，任取 $f\in H(\Omega\cup S)$，命

$$g(w)=f(\varphi_a^{-1}(w))(\det\varphi_a'(\varphi_a^{-1}(w)))^{-\frac{1}{2}},$$

则 $g\in H(\Omega\cup S)$，因而有展开式 $g(w)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\psi_k(w)$，即

$$f(\varphi_a^{-1}(w))(\det\varphi_a'(\varphi_a^{-1}(w)))^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\psi_k(w).$$

命 $w=\varphi_a(z)$，则有

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\psi_k(\varphi_a(z))(\det\varphi_a'(z))^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\omega_k(z).$$

这样定理 4.3.3 的条件都成立．于是

$$\begin{aligned}C(z,\zeta)&=\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k(z)\overline{\omega_k(\zeta)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(w)\overline{\psi_k(\eta)}(\det\varphi_a'(z))^{\frac{1}{2}}\overline{(\det\varphi'_a(\zeta))^{\frac{1}{2}}}\\&=C(w,\eta)(\det\varphi'_a(z))^{\frac{1}{2}}\overline{(\det\varphi'_a(\zeta))^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $w=\varphi_a(z),\eta=\varphi_a(\zeta)$，因为 $\psi_k(z)$ 是 k 次齐次多项式，所以 $C(0,\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(0)\psi_k(\zeta)$ 是一个常数．再由 Cauchy 公式 $1=\int_S C(0,\zeta)d\mu(\zeta)$，由此得 $C(0,\zeta)=(V(S))^{-1}$，在(4)中取 $a=z$，即得

$$C(z,\zeta)=\frac{1}{V(S)}(\det\varphi_z'(z))^{\frac{1}{2}}\overline{(\det\varphi_z'(\zeta))}^{\frac{1}{2}}.$$ □

§4.4 典型域的 Cauchy 积分公式

3.4.1 中定义的四类典型域都是有界的圆型星形域，特征边界也都满足定理 4.3.2 的要求．因此，§4.3 中的定理都适用于四类典型域．

4.4.1 $R_{\mathrm{I}}(n,n)$ 的 Cauchy 核

现在用定理 4.3.4 来计算矩阵双曲空间 $R_{\mathrm{I}}(m,n)$ 的 Cauchy 核．先假定 $m=n$，这时 $R_{\mathrm{I}}(n,n)$ 的元素是满足 $I-Z\overline{Z}'>0$ 的 n 阶方阵 Z，它的特征边界 S_{I} 是 n 阶酉方阵的全体．在 §3.4 中已经算出

$$\det\varphi_{Z_0}'(Z_0)=(\det A\overline{D})^n, \tag{1}$$

其中 A，D 分别满足

$$A'\overline{A}=(I-\overline{Z}_0Z_0')^{-1},D'\overline{D}=(I-Z_0'\overline{Z}_0)^{-1},$$

现在来计算 $\det\varphi_{Z_0}'(U)$，在 §3.4 中的等式

$$dW=A\{dZ(I-\overline{Z}_0Z)^{-1}-(Z-Z_0)(I-\overline{Z}_0Z)^{-1}\cdot d(I-\overline{Z}_0Z)(I-\overline{Z}_0Z)^{-1}\}D^{-1}$$

中命 $Z=U$，$W=V$ 得

$$\begin{aligned}dV&=A\{dU(I-\overline{Z}_0U)^{-1}+(U-Z_0)(I-\overline{Z}_0U)^{-1}\overline{Z}_0\cdot dU(I-\overline{Z}_0U)^{-1}\}D^{-1}\\&=[A+A(U-Z_0)(I-\overline{Z}_0U)^{-1}\overline{Z}_0]dZ(I-\overline{Z}_0U)^{-1}D^{-1}.\end{aligned}$$

若记

$$P=A+A(U-Z_0)(I-\overline{Z}_0U)^{-1}\overline{Z}_0,Q=(I-\overline{Z}_0U)^{-1}D^{-1},$$

则 $\varphi_{Z_0}'(U)=(P'\times Q)'$，所以

$$\det\varphi_{Z_0}'(U)=\det(P'\times Q)=(\det P)^n(\det Q)^n.$$

现在

$$\begin{aligned}\det P &= \det A \det[I+(U-Z_0)(I-\overline{Z}_0'U)^{-1}\overline{Z}_0'] \\ &= \det A \det[I+\overline{Z}_0'(U-Z_0)(I-\overline{Z}_0'U)^{-1}] \\ &= \det A \det[(I-\overline{Z}_0'Z_0)(I-\overline{Z}_0'U)^{-1}],\end{aligned}$$

$$\det Q = \det(I-\overline{Z}_0'U)^{-1}\det D^{-1}.$$

所以

$$\det\varphi_{Z_0}'(U) = (\det AD^{-1})^n(\det(I-\overline{Z}_0'Z_0))^n \cdot (\det(I-\overline{Z}_0'U)^{-1})^{2n}. \tag{2}$$

综合(1),(2)得

$$\begin{aligned}&(\det\varphi_{Z_0}'(Z_0))^{\frac{1}{2}}\overline{(\det\varphi_{Z_0}'(U))}^{\frac{1}{2}} \\ &= (\det A\overline{A})^{\frac{n}{2}}\det(I-Z_0'\overline{Z}_0)^{\frac{n}{2}}\det(I-Z_0'\overline{U})^{-n} \\ &= \det(I-Z_0'\overline{U})^{-n} = \det(I-Z_0\overline{U}')^{-n}.\end{aligned}$$

所以当 $m=n$ 时,$R_1(n,n)$的 Cauchy 核是

$$C(Z,U) = \frac{1}{V(S_1)\det(I-Z\overline{U}')^n}, \tag{3}$$

其中 $V(S_1)$是 $R_1(n,n)$的特征边界 S_1 的体积.

4.4.2 $R_1(m,n)(m<n)$的 Cauchy 核

现在设 $m<n$,我们利用 (3) 给出这种情形下的 Cauchy 核.为此需要一个代数引理.

引理 4.4.1 设 Z 是任意的 $m\times n$ $(m\leqslant n)$ 阶矩阵,则必存在 m 阶酉方阵 U 和 n 阶酉方阵 V,使得

$$Z=U(\Lambda, O)V,$$

这里

$$\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix},$$

λ_1^2, …, λ_m^2 是 $Z\overline{Z}'$的特征根.

证 先设 Z 的秩为 m，则 $Z\overline{Z}'$是正定的 Hermite 方阵，故存在 m 阶酉方阵 U，使得

$$\overline{U}'Z\overline{Z}'U=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^2\end{pmatrix},$$

这里 λ_1^2，…，λ_m^2 是 $Z\overline{Z}'$ 的特征根，它们都是正数．记

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix},$$

那么 $\Lambda^{-1}\overline{U}'Z\overline{Z}'U\Lambda^{-1}=I_m$. 命 $V_1=\Lambda^{-1}\overline{U}'Z$，$V_1$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，且 $V_1\overline{V}'_1=I_m$. 因而存在 $(n-m)\times n$ 阶矩阵 V_2，使得 $\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}=V$ 是 n 阶酉方阵．从 $V\overline{V}'=I_m$ 即知 $V_1\overline{V}'_2=O$. 于是 $V_1\overline{V}'=V_1(\overline{V}'_1,\overline{V}'_2)=(I_m,O)$，即 $\Lambda^{-1}\overline{U}'Z\overline{V}'=(I_m,O)$.

由此即得

$$Z=U(\Lambda,O)V.$$

如果 Z 的秩为 $r<m$，那么 $Z\overline{Z}'$ 的秩也为 r，故有 m 阶酉方阵 U_1，使得

$$\overline{U}'_1Z\overline{Z}'U_1=\begin{pmatrix}A & \\ & O\end{pmatrix},$$

这里 A 是 r 阶非异方阵．写 $\overline{U}'_1Z=\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\end{pmatrix}$，这里 Z_1 是 $r\times n$ 矩阵，Z_2 是 $(m-r)\times n$ 矩阵，从

$$\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\end{pmatrix}(\overline{Z}'_1,\ \overline{Z}'_2)=\begin{pmatrix}A & \\ & O\end{pmatrix},$$

即得 $Z_2\overline{Z}_2'=O$，因而 $Z_2=O$. 于是 $\overline{U}_1'Z=\begin{pmatrix}Z_1\\O\end{pmatrix}$. 这说明 Z_1 的秩也是 r. 根据上面已经证明的，存在 r 阶酉方阵 U_2，及 n 阶酉方阵 V，使得 $Z_1=U_2(\Lambda,O)V$，其中

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{pmatrix},$$

λ_1^2，…，λ_r^2 是 $Z_1\overline{Z}_1'$ 的特征根，由此可得

$$\begin{aligned}Z&=U_1\begin{pmatrix}Z_1\\O\end{pmatrix}=U_1\begin{pmatrix}U_2(\Lambda,O)V\\O\end{pmatrix}\\&=U_1\begin{pmatrix}U_2 & O\\O & I_{m-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda & O\\O & O\end{pmatrix}V.\end{aligned}$$

命 $U=U_1\begin{pmatrix}U_2 & O\\O & I_{m-r}\end{pmatrix}$，则 $Z=U\begin{pmatrix}\Lambda & O\\O & O\end{pmatrix}V$. □

现在回到 $m<n$ 的情形. 设 $Z\in R_{\text{I}}(m,n)$，Z 是 $m\times n$ 阶矩阵. 在 Z 上添加 $n-m$ 行 0，使其成为 n 阶方阵 $Z_1=\begin{pmatrix}Z\\O\end{pmatrix}$，用 $m=n$ 时的 Cauchy 核 (3) 得

$$f(Z_1)=\frac{1}{V(\mathscr{U}_n)}\int_{\mathscr{U}_n}\frac{f(U_n)d\mu(U_n)}{\det(I-Z_1\overline{U}_n')^n},\tag{4}$$

这里 $\mathscr{U}_n$ 是 n 阶酉方阵的全体. 现在 $R_{\text{I}}(m,n)$的特征边界为

$$S_{\text{I}}=\{U_{mn}:\ U_{mn}\text{为 }m\times n\text{ 矩阵满足 }U_{mn}\overline{U}'_{mn}=I_m\}.$$

对于 $U_{mn}\in S_{\text{I}}$，存在 $(n-m)\times n$ 阶矩阵 V，使得 $\begin{pmatrix}U_{mn}\\V\end{pmatrix}$ 为酉方阵 U_n，因而

$$\begin{pmatrix}U_{mn}\\V\end{pmatrix}(\overline{U}'_{mn},\overline{V}')=\begin{pmatrix}U_{mn}\overline{U}'_{mn} & U_{mn}\overline{V}'\\V\overline{U}'_{mn} & V\overline{V}'\end{pmatrix}=I_n,$$

所以

$$V\overline{V}'=I_{n-m},\quad U_{mn}\overline{V}'=O.\tag{5}$$

于是

$$I-Z_1\overline{U}'_n=\begin{pmatrix} I-Z\overline{U}'_{mn} & -Z\overline{V}' \\ O & I \end{pmatrix},$$

$$\det(I-Z_1\overline{U}'_n)=\det(I-Z\overline{U}'_{mn}).$$

如果记

$$E=\{V: V\text{ 是}(n-m)\times n\text{ 矩阵，}V\overline{V}'=I_{n-m}\text{，}U_{mn}\overline{V}'=O\}.$$

那么（4）便可写成

$$f\begin{pmatrix} Z \\ O \end{pmatrix}=\frac{1}{V(\mathscr{U}_n)}\int_{S_1}\int_E\frac{f\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}d\mu(U_{mn})d\mu(V)}{\det(I-Z\overline{U}'_{mn})^n}$$

$$=\frac{1}{V(\mathscr{U}_n)}\int_{S_1}\frac{d\mu(U_{mn})}{\det(I-Z\overline{U}'_{mn})^n}\int_E f\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}d\mu(V). \qquad (6)$$

对固定的 U_{mn}，由引理 4.4.1，存在 m 阶酉方阵 P 和 n 阶酉方阵 Q，使得 $PU_{mn}Q=(\Lambda, O)$. 但因 $U_{mn}\overline{U}'_{mn}=I_m$，所以 $\Lambda=I_m$. 因而有

$$PU_{mn}Q=(I_m, O). \qquad (7)$$

由（5）和（7）可得

$$(I_m, O)\overline{Q}'\overline{V}'=PU_{mn}Q\overline{Q}'\overline{V}'=PU_{mn}\overline{V}'=O,$$

取共轭转置得

$$VQ\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}=O. \qquad (8)$$

如果记 $VQ=(A, W)$，这里 A 是（$n-m$）$\times m$ 阶矩阵，W 是 $n-m$ 阶方阵，那么从（8）得 $A=O$，因而 $VQ=(O, W)$，即 $V=(O, W)\overline{Q}'$. 由于

$$I_{n-m}=VQ\overline{Q}'\overline{V}'=(O, W)\begin{pmatrix} O \\ \overline{W}' \end{pmatrix}=W\overline{W}',$$

所以 W 是 $n-m$ 阶酉方阵，而且从 $V\overline{V}'=W\overline{W}'$ 知道 $d\mu(V)=d\mu(W)$. 于是（6）中关于 V 在 E 上的积分可写为

$$\int_E f\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix} d\mu(V)=\int_{\mathscr{U}_{n-m}} f\begin{pmatrix} U_{mn} \\ (O,\ W)\ \overline{Q}' \end{pmatrix} d\mu(W). \qquad (9)$$

如果记 $g(W)=f\begin{pmatrix} U_{mn} \\ (O,\ W)\ \overline{Q}' \end{pmatrix}$，并用 $R_{\mathrm{I}}(n-m,\ n-m)$ 上的 Cauchy 积分公式得

$$g(W)=\frac{1}{V(\mathscr{U}_{n-m})}\int_{\mathscr{U}_{n-m}}\frac{g(U_{n-m})d\mu(U_{n-m})}{\det(I-W\overline{U}'_{n-m})^{n-m}},$$

命 $W=O$ 得

$$\begin{aligned} g(O)&=\frac{1}{V(\mathscr{U}_{n-m})}\int_{\mathscr{U}_{n-m}} g(U_{n-m})d\mu(U_{n-m}) \\ &=\frac{1}{V(\mathscr{U}_{n-m})}\int_{\mathscr{U}_{n-m}} g(W)d\mu(W) \\ &=\frac{1}{V(\mathscr{U}_{n-m})}\int_{\mathscr{U}_{n-m}} f\begin{pmatrix} U_{mn} \\ (O,W)\overline{Q}' \end{pmatrix} d\mu(W). \end{aligned} \qquad (10)$$

综合 (9)，(10) 和 (6)，即得

$$f\begin{pmatrix} Z \\ O \end{pmatrix}=\frac{V(\mathscr{U}_{n-m})}{V(\mathscr{U}_n)}\int_{S_{\mathrm{I}}}\frac{f\begin{pmatrix} U_{mn} \\ O \end{pmatrix} d\mu(U_{mn})}{\det(I-Z\overline{U}'_{mn})^n}.$$

由 [Hua] 知道，

$$\frac{V(\mathscr{U}_{n-m})}{V(\mathscr{U}_n)}=(V(S_{\mathrm{I}}))^{-1}.$$

于是得

定理 4.4.2 $R_{\mathrm{I}}(m,n)$ $(m\leqslant n)$ 的 Cauchy 核为

$$C_{\mathrm{I}}(Z,U_{mn})=\frac{1}{V(S_{\mathrm{I}})}\frac{1}{\det(I-Z\overline{U}'_{mn})^n}.$$

当 $m=1$ 时，我们再一次得到 §4.1 球上的 Cauchy 积分公式.

用类似的方法可得其它三类典型域的 Cauchy 核如下：

$$C_{\mathrm{II}}(Z,U)=\frac{1}{V(S_{\mathrm{II}})}\frac{1}{\det(I-Z\overline{U})^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

$$C_{\mathrm{III}}(Z,U)=\frac{1}{V(S_{\mathrm{III}})}\frac{1}{\det(I+Z\overline{U})^{\frac{1}{2}(n-1)}},$$

$$C_{\mathrm{IV}}(z,\theta,x)=\frac{1}{V(S_{\mathrm{IV}})}\frac{1}{[(x-e^{i\theta}z)(x-e^{-i\theta}z)']^{\frac{1}{2}n}}.$$

这里四类典型域的特征边界及其体积 $V(S_{\mathrm{I}})$，$V(S_{\mathrm{II}})$，$V(S_{\mathrm{III}})$，$V(S_{\mathrm{IV}})$华罗庚教授都已算出，具体数值参见［Hua］.

§4.5 微分形式和 Stokes 公式

上面讨论的是全纯函数的 Cauchy 积分公式，下面要讨论连续可微函数的 Cauchy 积分公式，讨论的主要工具是微积分基本定理在高维的推广——Stokes 公式.

4.5.1 $\mathbf{R}^N$ 中的微分形式

先从微分形式谈起.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，E 是 $\mathbf{R}^k$ 中的域. Ω 中的 k 维曲面是指一个 C^1 映射 Φ：$E\to\Omega$，E 称为这曲面的**参数域**. Ω 中的 $k\geqslant1$ 阶**微分形式**（简称为 Ω 上的 k 形式）

$$\alpha=\sum a_{i_1\cdots i_k}(x)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},\tag{1}$$

（这里指标 i_1，…，i_k 都独立地从 1 变到 N）是定义在 Ω 中所有 k 维曲面所成的集合上的一个泛函，对于每一个 Ω 中的 k 维曲面 Φ，α 对应着如下一个数：

$$\int_\Phi\alpha=\int_E\sum a_{i_1}\cdots{}_{i_k}(\Phi(u))\det\frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}dm(u),$$

这里 $dm(u)$ 是 E 上的 Lebesgue 测度. 如果记 $\Phi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N)$，那么上面的 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}=\frac{\partial(\varphi_{i_1},\cdots,\varphi_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}.$$

(1) 中的系数 $a_{i_1\cdots i_k}$是 Ω 中的连续函数.

Ω 中的 0 形式定义为 $C(\Omega)$中的函数.

如果对每一个 Ω 中的 k 维曲面 Φ 都有

$$\int_{\Phi}\alpha=\int_{\Phi}\beta,$$

就称这两个 k 形式 α 和 β 是相等的.

熟知交换行列式的两行将改变行列式的符号，由此得下面的反交换律：

$$dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i,$$

特别有

$$dx_i\wedge dx_i=0,\ 1\leqslant i\leqslant N.$$

由此可知，在 (1) 中若出现 $i_k=i_l$, $k\neq l$, 则该项为 0，其余的项可按照反交换律把它排成足标呈递增的形状. 于是 α 可写成

$$\alpha=\sum_I A_I(x)dx_I, \tag{2}$$

这里 $I=(i_1,\cdots,i_k)$, $i_1<i_2<\cdots<i_k$, 求和对所有这种形状的多重指标进行，其中

$$dx_I=dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

称为**基本的 k 形式**. (2) 称为 α 的标准表示. 容易看出，每个 k 形式的标准表示是唯一的. 特别 $\alpha=0$ 的充分必要条件是 (2) 中每个 $A_I=0$.

设 $\alpha=\sum_I A_I(x)dx_I$, $\beta=\sum_I B_I(x)dx_I$ 是两个 k 形式，λ 是任意一个复数，定义

$$\alpha+\beta=\sum_I(A_I(x)+B_I(x))dx_I,\qquad \lambda\alpha=\sum_I\lambda A_I(x)dx_I.$$

设 dx_I, dx_J 分别是基本的 k 形式和 l 形式，它们的乘积定义为 $k+l$ 阶形式

$$dx_I\wedge dx_J=dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}.$$

如果 I, J 中有公共的元素，那么 $dx_I\wedge dx_J=0$. 否则就可把它排

成递增的次序．现设

$$\alpha=\sum_I A_I(x)dx_I,\quad \beta=\sum_J B_J(x)dx_J$$

分别是 k 阶形式 α 和 l 阶形式 β 的标准表示，定义

$$\alpha\wedge\beta=\sum_{I,J}A_I(x)B_J(x)dx_I\wedge dx_J.$$

直接验证知道，它们满足结合律和分配律，但不满足交换律．交换的结果是

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\beta\wedge\alpha.$$

函数 f 和 k 形式 α 的乘积定义为 k 形式：

$$f\alpha=\alpha f=\sum_I f(x)A_I(x)dx_I.$$

现在定义微分算子 d 对 k 形式的作用．对 0 形式 f，定义

$$df=\sum_{j=1}^N\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j,$$

它是一个 1 形式．设 $\alpha=\sum_I A_I(x)dx_I$ 是 k 形式 α 的标准表示，定义

$$d\alpha=\sum_I dA_I\wedge dx_I=\sum_I\sum_{j=1}^N\frac{\partial A_I}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_I,$$

它是一个 $k+1$ 形式．

命题 4.5.1 (i) 设 α 和 β 分别是 C^1 的 k 形式和 l 形式，那么

$$d(\alpha\wedge\beta)=(d\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta;\tag{3}$$

(ii) 如果 α 是 C^2 的 k 形式，那么 $d^2\alpha=0$.

证 (i) 只要对特殊情况

$$\alpha=fdx_I,\qquad \beta=gdx_J$$

证明就够了，这里 f，$g\in C^1$，dx_I，dx_J 分别是 k 阶和 l 阶的基本形式．于是 $\alpha\wedge\beta=fgdx_I\wedge dx_J$. 不妨假定 I 和 J 没有公共元素，否则 (i) 中的三项都等于 0．写 $dx_I\wedge dx_J=\epsilon dx_M$，其中 $dx_M=dx_{m_1}$

$\wedge\cdots\wedge dx_{m_{k+l}}$，$\varepsilon$ 取 $+1$ 或 -1 取决于置换 $\begin{pmatrix} i_1 & \cdots i_k j_1 \cdots j_l \\ m_1 & \cdots m_k \cdots\ m_{k+l} \end{pmatrix}$ 是偶的或奇的．于是

$$d(\alpha\wedge\beta)=d(fg\varepsilon dx_M)=\varepsilon(fdg+gdf)\wedge dx_M$$
$$=(gdf+fdg)\wedge dx_I\wedge dx_J.$$

因为 dg 是一个 1 形式，dx_I 是一个 k 形式，所以

$$dg\wedge dx_I=(-1)^k dx_I\wedge dg.$$

因而

$$\begin{aligned}d(\alpha\wedge\beta)&=gdf\wedge dx_I\wedge dx_J+fdg\wedge dx_I\wedge dx_J\\&=(df\wedge dx_I)\wedge(gdx_J)+(-1)^k(fdx_I)\wedge(dg\wedge dx_J)\\&=(d\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta.\end{aligned}$$

（ii）先对 0 形式 f 来证明 $d^2f=0$.

$$d^2f=d(df)=d\left(\sum_{j=1}^N\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j\right)=\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\wedge dx_j,$$

因为$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$，$dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i$，所以 $d^2f=0$.

现设 $\alpha=fdx_I$，那么 $d\alpha=df\wedge dx_I$，由于 $d\ (dx_I)\ =0$，利用（3）便得

$$d^2\alpha=d(df\wedge dx_I)=d^2f\wedge dx_I-df\wedge d(dx_I)=0.$$

命题证毕．□

现在讨论微分形式的坐标变换．设 Ω_1 和 Ω_2 分别是 $\mathbf{R}^N$ 和 $\mathbf{R}^M$ 中的开集，$T:\Omega_1\to\Omega_2$ 是一个 C^1 映射，它的分量记为 $t_1,\cdots,t_M$，即 $T=(t_1,\cdots,t_M)$，每个 $t_j(j=1,\cdots,M)$ 是 Ω_1 中的 C^1 函数．如果 $\alpha=\sum\limits_I A_I(y)dy_I$ 是 Ω_2 中的 k 形式，那么

$$\alpha_T=\sum_I A_I(T(x))dt_I$$

是 Ω_1 中的 k 形式，其中 $dt_I=dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_k}$，每个 dt_i 都是 1 形式：

$$dt_i=\sum_{j=1}^N\frac{\partial t_i}{\partial x_j}dx_j,1\leqslant i\leqslant M.$$

称 α_T 为 α 的**拉回**. 微分形式 α 和它的拉回 α_T 间有下列重要性质.

命题 4.5.2 设 α 和 β 分别是 Ω_2 中的 k 形式和 l 形式，那么

(i) 若 $k=l$，则 $(\alpha+\beta)_T=\alpha_T+\beta_T$；

(ii) $(\alpha\wedge\beta)_T=\alpha_T\wedge\beta_T$；

(iii) 设 $\Omega_0\subset\mathbf{R}^P$，如果 S：$\Omega_0\to\Omega_1$ 是 C^1 映射，那么

$$(\alpha_T)_S=\alpha_{TS};$$

(iv) 若 α 是 C^1 类 k 形式，T 是 C^2 类映射，则

$$(d\alpha)_T=d(\alpha_T).$$

证 (i) 和 (ii) 是显然的. 现在证明 (iii). 从 (ii) 知道，$((\alpha\wedge\beta)_T)_S=(\alpha_T\wedge\beta_T)_S=(\alpha_T)_S\wedge(\beta_T)_S$，$(\alpha\wedge\beta)_{TS}=\alpha_{TS}\wedge\beta_{TS}$. 这就是说，如果 (iii) 对 α 和 β 成立，那么也对 $\alpha\wedge\beta$ 成立. 由于每个形式是由 0 形式和 1 形式经过加法和乘法构成，而对 0 形式 (iii) 显然成立，因而只须对 1 形式证明 (iii) 就行了. 分别用 x，y，z 记 Ω_0，Ω_1，Ω_2 中的元素，记

$T=(t_1,\cdots,t_M)$，$S=(s_1,\cdots,s_N)$，$TS=(r_1,\cdots,r_M)$.

现设 $\alpha=dz_q$，$q=1$，$\cdots$，M 是 Ω_2 中的 1 形式，那么

$$\alpha_T=dt_q=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial t_q}{\partial y_j}dy_j,$$

$$\begin{aligned}(\alpha_T)_S&=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial t_q}{\partial y_j}(S(x))ds_j=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial t_q}{\partial y_j}(S(x))\sum_{i=1}^{P}\frac{\partial s_j}{\partial x_i}(x)dx_i\\&=\sum_{i=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial t_q}{\partial y_j}(S(x))\frac{\partial s_j}{\partial x_i}(x)\right)dx_i=\sum_{i=1}^{P}\frac{\partial r_q}{\partial x_i}(x)dx_i\\&=dr_q=\alpha_{TS}.\end{aligned}$$

再证明 (iv). 如果 f 是一个 0 形式，那么

$$f_T(x)=f(Tx),df=\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j.$$

于是

$$d(f_T)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f_T}{\partial x_j}(x)dx_j=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\frac{\partial f}{\partial y_i}(Tx)\frac{\partial t_i}{\partial x_j}(x)dx_j$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial f}{\partial y_j}(Tx)dt_j=(df)_T.$$

如果 $dy_I=dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_k}$，那么 $(dy_I)_T=dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_k}$. 由命题 4.5.1(ii)得 $d((dy_I)_T)=0$. 设 $\alpha=fdy_I$,则 $\alpha_T=f_T(x)(dy_I)_T$. 由命题 4.5.1(i)得

$$\begin{aligned}d(\alpha_T)&=d(f_T)\wedge(dy_I)_T+f_T\wedge d((dy_I)_T)\\&=(df)_T\wedge(dy_I)_T=(df\wedge dy_I)_T=(d\alpha)_T.\quad\Box\end{aligned}$$

命题 4.5.3 (i) 设 β 是 $\Omega_1\subset\mathbf{R}^N$ 中的 k 形式，Φ 是 Ω_1 中的 k 维曲面，其参数域为 $E\subset\mathbf{R}^k$，记 $I: E\to\mathbf{R}^k$ 为恒等映射，它是以 E 为参数域的一个 k 维曲面，那么

$$\int_\Phi\beta=\int_I\beta_\Phi;\tag{4}$$

(ii) 设 Ω_1，Ω_2 分别为 $\mathbf{R}^N$ 和 $\mathbf{R}^M$ 中的域，$T: \Omega_1\to\Omega_2$ 是 C^1 类映射，α 是 Ω_2 中的 k 形式，Φ 是 Ω_1 中的 k 维曲面，那么

$$\int_\Phi\alpha_T=\int_{T\Phi}\alpha.\tag{5}$$

证 (i) 只要讨论

$$\beta=f(x)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

这种 k 形式就够了. 设 $\Phi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)$，那么

$$\beta_\Phi=f(\Phi(u))d\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{i_k}.$$

如果我们能证明

$$d\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{i_k}=\det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\cdots,\varphi_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}du_1\wedge\cdots\wedge du_k,\tag{6}$$

那么一方面

$$\int_\Phi\beta=\int_E f(\Phi(u))\det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\cdots,\varphi_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}dm(u).$$

另一方面，由于 (6)

$$\beta_\Phi=f(\Phi(u))\det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\cdots,\varphi_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}du_1\wedge\cdots\wedge du_k,$$

所以

$$\int_I \beta_\Phi = \int_E f(\Phi(u))\det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\cdots,\varphi_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}dm(u),$$

这是因为 I 是恒等映射. 因而（4）成立. 现在来证明（6）. 因为 $d\varphi_{i_p}=\sum\limits_{q=1}^{k}\frac{\partial\varphi_{i_p}}{\partial u_q}du_q$，若记 $a_{pq}=\frac{\partial\varphi_{i_p}}{\partial u_q}$，那么

$$d\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{i_k}=\sum_{q_1,\cdots,q_k=1}^{k}a_{1q_1}\cdots a_{kq_k}du_{q_1}\wedge\cdots\wedge du_{q_k}.$$

由反交换关系可得

$$du_{q_1}\wedge\cdots\wedge du_{q_k}=\tau(q_1\cdots q_k)du_1\wedge\cdots\wedge du_k,$$

这里如果 $(q_1\cdots q_k)$ 是偶排列，$\tau(q_1\cdots q_k)=1$；如果 $(q_1\cdots q_k)$ 是奇排列，$\tau(q_1\cdots q_k)=-1$. 于是

$$d\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{i_k}=\sum_{q_1,\cdots,q_k=1}^{k}\tau(q_1\cdots q_k)a_{1q_1}\cdots a_{kq_k}du_1\wedge\cdots\wedge du_k$$

$$=\det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\cdots,\varphi_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}du_1\wedge\cdots\wedge du_k.$$

这就证明了（6）.

（ii）现在来证明（5）就很简单了. 命 $\beta=\alpha_T$，先用（4），再用命题 4.5.2（iii），最后再用（4），即得

$$\int_\Phi\alpha_T=\int_\Phi\beta=\int_I\beta_\Phi=\int_I(\alpha_T)_\Phi=\int_I\alpha_{T\Phi}=\int_{T\Phi}\alpha. \qquad \square$$

前面我们把 k 形式定义为 k 维曲面构成的集合上的泛函，它的对应关系是通过一个积分式来表示的. 实际上，我们也可反过来看，把 k 维曲面定义成由 k 形式组成的集合上的泛函，它的对应关系是同一个积分式. 由于数值函数是可以相加的，这样 k 维曲面的有限和也就有意义了. 通常称 k 维曲面的有限和为 k 维链. 设 $\Psi=\Phi_1+\cdots+\Phi_s$ 是一个 k 维链，k 形式 α 在链 Ψ 上的积分定义为

$$\int_{\Psi}\alpha=\sum_{j=1}^{s}\int_{\Phi_j}\alpha.$$

下面是一个链的重要例子.

设 E 是 $\mathbf{R}^k$ 中的闭单位立方体，即

$$E=\{u=(u_1,\cdots,u_k):0\leqslant u_j\leqslant 1,j=1,\cdots,k\},$$

记 I: $E\to\mathbf{R}^k$ 是恒等映射，那么 I 是 $\mathbf{R}^k$ 中以 E 为参数域的一个 k 维曲面. 如果定义立方体的"面"为

$$F_{j,0}(v)=(v_1,\ \cdots,\ v_{j-1},\ 0,\ v_j,\ \cdots,\ v_{k-1}),$$

$$F_{j,1}(v)=(v_1,\ \cdots,\ v_{j-1},\ 1,\ v_j,\ \cdots,\ v_{k-1}),\ j=1,\ \cdots,\ k,$$

这里 v 跑遍 $\mathbf{R}^{k-1}$中的单位立方体（这 $2k$ 个"面"都是 $\mathbf{R}^k$ 中的 $k-1$ 维曲面，参数域为 $\mathbf{R}^{k-1}$中的单位立方体），那么 I 的边界可以定义为

$$\partial I=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j(F_{j,0}-F_{j,1}),\tag{7}$$

它是 $\mathbf{R}^k$ 中的 $k-1$ 维链.

仍设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，Φ: $E\to\Omega$ 是一个 C^2 类的 k 维曲面，这里 E 是 $\mathbf{R}^k$ 中的单位立方体. 我们定义 Φ 的定向边界 $\partial\Phi$ 为如下的 $k-1$ 维链

$$\partial\Phi=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j(\Phi\circ F_{j,0}-\Phi\circ F_{j,1}),\tag{8}$$

简记为 $\partial\Phi=\Phi(\partial I)$.

4.5.2 Stokes 公式

现在可以证明下面的

定理 4.5.4 (Stokes) 设 Ω，Φ，$\partial\Phi$ 均如上所述，α 是 Ω 上的系数为 C^1 类函数的 $k-1$ 形式，那么

$$\int_{\partial\Phi}\alpha=\int_{\Phi}d\alpha.\tag{9}$$

证 证明分为两部分. 先证明

$$\int_{\partial I}\alpha=\int_{I}d\alpha, \tag{10}$$

这里 I 是 $\mathbf{R}^k$ 中以 E 为参数域的 k 维曲面，∂I 如（7）所示．不妨设

$$\alpha=f dx_1\wedge\cdots\wedge[i]\wedge\cdots\wedge dx_k,$$

这里 $[i]$ 表示缺 dx_i 项．由于 $F_{j,0}$ 或 $F_{j,1}$ 表示第 j 个坐标是 0 或 1，因此当 α 中出现 dx_j 时，则 $\int_{F_{j,0}}\alpha=\int_{F_{j,1}}\alpha=0$；当 α 中不出现 dx_j 时，则

$$\int_{F_{j,0}}\alpha=\int_{E_{k-1}}f(x_1,\cdots,x_{j-1},0,\cdots,x_k)dx_1\cdots[j]\cdots dx_k,$$

$$\int_{F_{j,1}}\alpha=\int_{E_{k-1}}f(x_1,\cdots,x_{j-1},1,\cdots,x_k)dx_1\cdots[j]\cdots dx_k,$$

这里 E_{k-1} 记 $\mathbf{R}^{k-1}$ 中的单位立方体．于是

$$\begin{aligned}\int_{\partial I}\alpha&=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\left(\int_{F_{j,0}}\alpha-\int_{F_{j,1}}\alpha\right)\\&=(-1)^i\int_{E_{k-1}}\{f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,\cdots,x_k)\\&\quad-f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,\cdots,x_k)\}dx_1\cdots[i]\cdots dx_k\\&=(-1)^{i+1}\int_{E_{k-1}}\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right)dx_1\cdots[i]\cdots dx_k\\&=(-1)^{i+1}\int_{E_k}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_k,\end{aligned}$$

这里 E_k 记 $\mathbf{R}^k$ 中的单位立方体．另一方面

$$\begin{aligned}\int_I d\alpha&=\int_I\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge[i]\wedge\cdots\wedge dx_k\\&=\int_I\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge[i]\wedge\cdots\wedge dx_k\\&=(-1)^{i-1}\int_I\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k\end{aligned}$$

$$= (-1)^{i-1}\int_{E_k}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_k,$$

由此即得 (10). 现在很容易证明 (9). 因为 $\Phi=\Phi\circ I$, 先用命题 4.5.3 (ii), 再用等式 (10), 命题 4.5.2 (iv), 最后再用命题 4.5.3 (ii) 即得

$$\int_{\partial\Phi}\alpha=\int_{\Phi(\partial I)}\alpha=\int_{\partial I}\alpha_\Phi=\int_I d(\alpha_\Phi)=\int_I (d\alpha)_\Phi=\int_{\Phi\cdot I}d\alpha=\int_\Phi d\alpha.\ \square$$

在应用 Stokes 公式时, 经常遇到的是 $k=N$ 的情形, 适当选择参数域后, Φ 就是域 Ω. 由于在定理 4.5.4 中要求 Φ 是 C^2 的, 在现在的情况下, 相应地要求域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 C^2 的.

所谓域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 C^j ($j\geqslant1$) 的, 是指存在一个 C^j 函数 ρ: $\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$, 使得

$$\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N:\rho(x)<0\},$$

而且 $\mathrm{grad}\rho(x)\neq0$ 对所有 $x\in\partial\Omega$ 成立. ρ 称为域 Ω 的**定义函数** (关于可微边界及定义函数的确切含义, 请参阅定义 5.3.1).

例如 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球, 它的定义函数就是

$$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1.$$

也可以把它看成 $\mathbf{R}^3$ 中的三维曲面 Φ: $E\to\mathbf{R}^3$, Φ 的表达式是

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta,$$

相应的参数域 E 是:

$$0\leqslant r<1,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

在这种情况下, Stokes 定理可以表达为

定理 4.5.5 设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的域, 具有 C^2 定向边界 $\partial\Omega$. 如果 α 是系数为 C^1 函数的 $\overline{\Omega}$ 上的 $N-1$ 形式, 那么

$$\int_{\partial\Omega}\alpha=\int_\Omega d\alpha.$$

4.5.3 $\mathbf{C}^n$ 中的微分形式

作为本节的结尾, 我们讨论 $\mathbf{C}^n$ 中的微分形式. 把 $\mathbf{C}^n$ 看成 $\mathbf{R}^{2n}$, 上面讨论的一切对 $\mathbf{C}^n$ 都有效, 但 $\mathbf{C}^n$ 的复结构本身又有一些特殊

的性质．在 $\mathbf{C}^n$ 中取实坐标 $x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n$，把算子 d 作用到函数 $z_j=x_j+iy_j$，$\bar{z}_j=x_j-iy_j$ 可得如下的 1 形式

$$dz_j=dx_j+idy_j,\ d\bar{z}_j=dx_j-idy_j,\ j=1,\cdots,n.$$

于是

$$dx_j=\frac{1}{2}(dz_j+d\bar{z}_j)\quad dy_j=\frac{1}{2i}(dz_j-d\bar{z}_j).$$

因此 $\mathbf{C}^n$ 中的 k 形式可表为

$$f=\sum_{|I|=p}\ \sum_{|J|=q}f_{IJ}(z)dz_I\wedge d\bar{z}_J.$$

这里 $I=(i_1,\cdots,i_p)$，$J=(j_1,\cdots,j_q)$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n$，$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_q\leqslant n$，$p+q=k$，$dz_I=dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}$，$d\bar{z}_J=d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_q}$，$f_{IJ}$ 都是函数．这样一个微分形式称为是 (p,q) 型的．

设 φ 是一个函数，由（3）得

$$d\varphi=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_j+\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}dy_j\right).$$

如果利用§1.1（3）引进的算子 $\frac{\partial}{\partial z_j}$ 和 $\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}$，那么上式也可写成

$$d\varphi=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}dz_j+\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_j}d\bar{z}_j\right).\tag{11}$$

引进算子 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 如下

$$\partial\varphi=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}dz_j\quad \bar{\partial}\varphi=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_j}d\bar{z}_j.$$

由（11）可得 d 和 ∂, $\bar{\partial}$ 的关系：

$$d=\partial+\bar{\partial}.$$

设 $f=\sum\limits_{I,J}f_{IJ}(z)dz_I\wedge d\bar{z}_J$ 是一个 (p,q) 形式，那么

$$df=\sum_{I,J}(df_{IJ})\wedge dz_I\wedge d\bar{z}_J=\partial f+\bar{\partial}f,$$

这里

$$\partial f=\sum_{I,J}(\partial f_{IJ})\wedge dz_I\wedge d\bar{z}_J,\bar{\partial}f=\sum_{I,J}(\bar{\partial}f_{IJ})\wedge dz_I\wedge d\bar{z}_J.$$

由此可见，算子 ∂ 把(p,q)形式映为$(p+1,q)$形式，算子 $\bar\partial$ 把(p,q)形式映为$(p,q+1)$形式.

从命题 4.5.1 (ii) 知道 $d^2=0$，即 $(\partial+\bar\partial)^2=0$，即

$$\partial^2+(\partial\bar\partial+\bar\partial\partial)+\bar\partial^2=0. \tag{12}$$

设 f 是 (p,q) 形式，则 $\partial^2 f$，$(\partial\bar\partial+\bar\partial\partial)f$ 和 $\bar\partial^2 f$ 分别是 $(p+2,q)$，$(p+1,q+1)$ 和 $(p,q+2)$ 形式，所以从 (12) 得

$$\partial^2=0,\quad \partial\bar\partial+\bar\partial\partial=0,\quad \bar\partial^2=0. \tag{13}$$

关于微分形式和 Stokes 公式的内容可参阅 [Xu] 和 [Ru1].

§4.6 单位分解

在讨论 $\bar\partial$ 问题时，需要用到单位分解的概念. 在这一节中，我们要证明这种单位分解是存在的，并由它推出一个有用的结论.

先给出下面的

定义 4.6.1 设 φ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的连续函数，使 φ 不取零值的点集的闭包称为 φ 的**支集**，记为 $\mathrm{supp}\varphi$，即

$$\mathrm{supp}\varphi=\overline{\{x\in\mathbf{R}^N:\varphi(x)\neq 0\}}.$$

定义 4.6.2 设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，$C^k(\mathbf{R}^N)$ 中具有紧支集，且其紧支集包含在 G 中的函数的全体记为 $C_0^k(G)$，即

$$C_0^k(G)=\{\varphi\in C^k(\mathbf{R}^N):\mathrm{supp}\varphi\text{ 紧},\mathrm{supp}\varphi\subset G\}.$$

我们的目的是要证明下面的

定理 4.6.3 设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，$\{G_i:i\in I\}$ 是覆盖 G 的一个开集族，即 $G=\bigcup\limits_{i\in I}G_i$，则必存在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ 中的函数列 $\{f_j\}$，$j=1,2,\cdots$ 使得

(i) 对于每个 j，$\mathrm{supp}f_j$ 含于某个 G_i 之中；

(ii) 对于任意 $x\in\mathbf{R}^N$，$0\leqslant f_j(x)\leqslant 1$，$j=1,2,\cdots$

(iii) 对于每个 $x\in G$，$\sum\limits_{j=1}^{\infty}f_j(x)=1$.

这里的 $\{f_i\}$ 称为从属于 $\{G_i: i\in I\}$ 的一个单位分解.

为证这定理，先证明下面两个引理.

引理 4.6.4 设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，则必存在一列子集 $K_j\subset G$，满足下列条件：

(i) K_j 是紧的，$j=1, 2, \cdots$

(ii) $\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j=G$；

(iii) $K_j\subset\mathring{K}_{j+1}$，$j=1, 2, \cdots$，$\mathring{K}_{j+1}$记 K_{j+1}的内部.

证 命 $G_\varepsilon=\{x\in G: d(x, \mathbf{R}^N-G)\geqslant\varepsilon\}$，$B(0,r)$为 $\mathbf{R}^N$ 中以原点为中心，r 为半径的球. 那么 $K_j=\overline{B(0,j)}\cap G_{\frac{1}{j}}$就是要找的一列子集. 因为$\overline{B(0,j)}$和 $G_{\frac{1}{j}}$都是闭的，所以 K_j 是闭的. 因为 $B(0,j)$是有界的，所以 K_j 也是有界的，因而 K_j 是紧的，而且 $K_j\subset G$. 为了证明 (ii)，任取 $x\in G$，当然有 $\varepsilon=d(x,\mathbf{R}^N-G)>0$. 对于这个 x，存在充分大的 j_0，使得 $x\in\overline{B(0,j_0)}$. 今取 $j>\max(j_0, \frac{1}{\varepsilon})$，当然 $x\in\overline{B(0,j)}$，而且 $d(x,\mathbf{R}^N-G)=\varepsilon>\frac{1}{j}$，即 $x\in G_{\frac{1}{j}}$. 因而 $x\in\overline{B(0,j)}\cap G_{\frac{1}{j}}=K_j$，这就证明了 $G=\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j$. 现在证明 (iii)，取 $x_0\in K_j$，则 $x_0\in G_{\frac{1}{j}}$. 因而 $d(x_0,\mathbf{R}^N-G)\geqslant\frac{1}{j}>\frac{1}{j+1}$，所以 $x_0\in G_{\frac{1}{j+1}}$. 取 x_0 的邻域

$$U(x_0)=\left\{x\in\mathbf{R}^N:d(x,x_0)<\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right\}.$$

于是对于 $x\in U(x_0)$ 有

$$\begin{aligned}d(x,\mathbf{R}^N-G)&\geqslant d(x_0,\mathbf{R}^N-G)-d(x,x_0)\\&\geqslant\frac{1}{j}-\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)=\frac{1}{j+1},\end{aligned}$$

即 $U(x_0)\subset G_{\frac{1}{j+1}}$，故 x_0 是 $G_{\frac{1}{j+1}}$的内点，即 $G_{\frac{1}{j}}\subset\mathring{G}_{\frac{1}{j+1}}$. 此外，显然有$\overline{B(0,j)}\subset B(0,j+1)$，因而 $K_j\subset\mathring{K}_{j+1}$. □

称满足上述 (i)、(ii)、(iii) 三条的子集序列 $\{K_j\}$ 为 G 的一

个正规穷竭.

引理 4.6.5 设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，如果 G 的某些开子集 Q 组成的集族 $\{Q\}$ 构成 G 的一个开集基，即 G 的任意开子集均可表为 $\{Q\}$ 中某些开集的并，那么从 $\{Q\}$ 中可以选出一列开集 Q_j，$j=1,2,\cdots$ 使得

(i) $G=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}Q_j$;

(ii) G 的任意紧子集最多只与 $\{Q_j\}$ 中的有限多个相交.

证 设 $\{K_j\}$ 是 G 的一个正规穷竭，命

$$U_j=\mathring{K}_{j+1}-K_{j-2},\ V_j=K_j-\mathring{K}_{j-1},$$

这里记 $K_0=K_{-1}$ 为空集. 显然 U_j 是开集，V_j 为紧集，$V_j\subset U_j$，且 $G=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}V_j$. 任取 $a\in V_j\subset U_j$，由于 U_j 可表成 $\{Q\}$ 中某些开集的并，故从 $\{Q\}$ 中可选出某个 $Q_{a,j}$，使得 $a\in Q_{a,j}\subset U_j$. 显然 $\{Q_{a,j}: a\in V_j\}$ 是 V_j 的一个开覆盖，故可选出有限个 $Q_{a_1,j},\cdots,Q_{a_{s_j},j}$ 覆盖 V_j. 于是

$$\{Q_{a_k,j}:k=1,\cdots,s_j;j=1,2,\cdots\} \tag{1}$$

便是要找的那列开集. 事实上，容易看出

$$G=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{s_j}Q_{a_k,j}.$$

从 U_j 的构造，可知 G 的任意紧集只与有限个 U_j 相交，而每个 U_j 又只与 (1) 中有限多个 $Q_{a_k,j}$ 相交，因而每个紧集只与 (1) 中有限多个开集相交. □

定理 4.6.3 的证明 任取 $a\in G$，则必有 G_i 使得 $a\in G_i$，取充分小的 $r>0$，使得 $\overline{B(a,r)}\subset G_i$，这里 $B(a,r)$ 是以 a 为中心、r 为半径的球. 命

$$f_{a,r}(x)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{|x-a|^2-r^2}\right), & |x-a|<r,\\ 0, & |x-a|\geqslant r,\end{cases}$$

则 $f_{a,r}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$，且 $\text{supp} f_{a,r}=\overline{B(a,r)}\subset G_i$. 让 a 跑遍 G_i，i 跑遍 I，则 $\{B(a,r)\}$ 构成 G 的一个开集基. 于是由引理 4.6.5，可以选出一列球

$$B(a_j,r_j),\quad j=1,2,\cdots,\tag{2}$$

使得 $G=\bigcup_{j=1}^{\infty}B(a_j,r_j)$，且 G 的任意紧集只与(2)中有限个球相交. 设对应于 $B(a_j,r_j)$ 的函数为 $f_{a_j,r_j}(x)$，对于任意 $x\in G$，它只属于有限多个 $B(a_j,r_j)$. 因此级数 $\sum_{j=1}^{\infty}f_{a_j,r_j}(x)$ 只有有限多项，记

$$S(x)=\sum_{j=1}^{\infty}f_{a_j,r_j}(x)>0,$$

则 $f_j(x)=\frac{1}{S(x)}f_{a_j,r_j}(x)$ 为满足(i)、(ii)、(iii)的函数列.

□

作为单位分解定理的一个应用，我们有

推论 4.6.6 设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，K 是 G 的一个紧子集. 设 V 是 K 的一个开邻域，$V\subset G$. 那么存在函数 φ，满足下列条件：

(i) $\varphi\in C_0^\infty(V)$；

(ii) $0\leqslant\varphi\leqslant 1$；

(iii) $\varphi\equiv 1$ 在 K 的邻域中成立.

证 对 $\varepsilon>0$，记 $V(K,\varepsilon)=\{x\in\mathbf{R}^N: d(x,K)<\varepsilon\}$. 选择 $\varepsilon>0$，使得 $K\subset V(K,\varepsilon)\subset\overline{V}(K,2\varepsilon)\subset V$. 命

$$G_1=V(K,2\varepsilon),\quad G_2=G-\overline{V}(K,\varepsilon),$$

则 G_1、G_2 便构成 G 的一个开覆盖. 应用定理 4.6.3 于这一覆盖，存在从属于这一覆盖的单位分解 $\{f_j\}$. 命

$$\varphi=\sum_j{}' f_j,\tag{3}$$

这里 $\sum_j{}'$ 表示对这样一些 j 求和，它所对应的 f_j 满足 $\text{supp} f_j\subset$

G_1，因而 (i) 和 (ii) 成立．现证当 $x\in V(K,\epsilon)$时，恒有$\varphi(x)=1$．因为如果某个指标 k 不出现在 (3) 的和式中，这就意味着 $\mathrm{supp}f_k \not\subset G_1$，因为 $\mathrm{supp}f_k\subset G_2$，即 $f_k(x)=0$．于是

$$\varphi(x) = \sum_j{}' f_j(x) = \sum_j f_j(x) = 1. \square$$

在下面的讨论中，我们将多次用到这个推论．

§4.7 复平面上非齐次 Cauchy 积分公式及其应用

4.7.1 非齐次 Cauchy 积分公式

前面讨论的是全纯函数的 Cauchy 积分公式，现在我们要建立连续可微函数的 Cauchy 积分公式．先从 $n=1$ 的情形说起．

定理 4.7.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中具有光滑定向边界的有界域．如果 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，那么对每个 $a\in\Omega$ 有

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\lambda)}{\lambda-a}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{1}{\lambda-a}\frac{\partial f}{\partial\bar{\lambda}}(\lambda)d\lambda\wedge d\bar{\lambda}. \quad (1)$$

证 取 $\epsilon>0$ 充分小，使得

$$D_\epsilon = \{\lambda:|\lambda-a|\leqslant\epsilon\}\subset\Omega.$$

记 $\Omega_\epsilon=\Omega-D_\epsilon$,考虑(1,0)形式 $\beta=\dfrac{f(\lambda)}{\lambda-a}d\lambda$. 因为$\dfrac{1}{\lambda-a}$在$\Omega_\epsilon$中全纯,故在 Ω_ϵ 中有

$$d\beta = \partial\beta+\bar{\partial}\beta = \bar{\partial}\beta = \frac{1}{\lambda-a}\frac{\partial f}{\partial\bar{\lambda}}d\bar{\lambda}\wedge d\lambda.$$

在 Ω_ϵ 上用 Stokes 公式：

$$\int_{\partial\Omega}\beta - \int_{\partial D_\epsilon}\beta = \int_{\Omega_\epsilon}d\beta = \int_{\Omega_\epsilon}\frac{1}{\lambda-a}\frac{\partial f}{\partial\bar{\lambda}}d\bar{\lambda}\wedge d\lambda.$$

命 $\epsilon\to 0$,∂D_ϵ上的积分趋于 $2\pi i f(a)$,Ω_ϵ上的积分收敛于 Ω 上的积分．由此即得 (1)．□

注意，如果 $f \in H(\Omega)$，则$\frac{\partial f}{\partial \bar{\lambda}} = 0$，(1) 就变成大家熟知的 Cauchy 积分公式．

公式 (1) 有时称为非齐次的 Cauchy 积分公式．

这个简单的公式(1)在解 $\bar{\partial}$ 问题时有重要的应用．

所谓 $\bar{\partial}$ 问题是指在域 Ω 上给定一个$(p,q+1)$ 形式 f，要在 Ω 上找一个(p,q) 形式 u，使得

$$\bar{\partial} u = f \tag{2}$$

在 Ω 上成立．

由 §4.5 的 (13) 知道 $\bar{\partial}^2 = 0$，所以上述问题有解的必要条件是 $\bar{\partial} f = 0$.

当 $p = q = 0$ 时，这个问题特别重要，这时 $\bar{\partial}$ 问题可叙述为：给定一个 (0，1) 形式 $f = \sum_{j=1}^{n} f_j(z) d\bar{z}_j$，满足 $\bar{\partial} f = 0$，要找一个函数 u，使得 $\bar{\partial} u = f$.

4.7.2 平面上 $\bar{\partial}$ 问题的解

定理 4.7.1 可以用来解决平面上的 $\bar{\partial}$ 问题．

定理 4.7.2 设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的有界域，$f \in C^1(\Omega)$ 且有界，命

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda \wedge d\bar{\lambda}, z \in \Omega, \tag{3}$$

则 $u \in C^1(\Omega)$，且$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$，$\| u \|_{\infty} \leqslant C \| f \|_{\infty}$，这里$C$是一个常数，$\| u \|_{\infty} = \sup_{\Omega} |u|$.

证 扩充f的定义到整个复平面上，当 $z \notin \Omega$ 时，定义 $f(z) = 0$. 这时(3) 可写为

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} f(z+\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta}.$$

从 $f \in C^1(\Omega)$ 即得 $u \in C^1(\Omega)$. 固定 $a \in \Omega$，取 a 的邻域 V，使得 $a \in V \subset \Omega$. 根据推论 4.6.6，存在 $\psi \in C^{\infty}(\mathbf{C})$，使得 $\psi|_V = 1$，且

$\mathrm{supp}\psi \subset \Omega$. 若记

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}} \frac{(\psi f)(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda \wedge d\bar{\lambda}, u_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}} \frac{(1-\psi)f}{\lambda - z} d\lambda \wedge d\bar{\lambda},$$

则 $u = u_1 + u_2$. 由于$(1-\psi)f|_V = 0$,所以

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}-V} \frac{(1-\psi)f}{\lambda - z} d\lambda \wedge d\bar{\lambda}.$$

故当 $z \in V$ 时,u_2 的被积函数是 z 的全纯函数,因而$\frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}} = 0$. 于是在 V 上有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}} (\psi f)(z+\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}} \left\{\frac{\partial(\psi f)}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial(\psi f)}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{z}}\right\}\frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial(\psi f)}{\partial \bar{\lambda}}\frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial(\psi f)}{\partial \bar{\lambda}}\frac{1}{\lambda - z} d\lambda \wedge d\bar{\lambda}.
\end{aligned}$$

因为 $\psi f \in C^1(\mathbf{C})$, 且在 $\mathbf{C}$ 中有紧支集, 故由定理 4.7.1, 上式右端等于$(\psi f)(z) = f(z)$. 特别有

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(a) = f(a).$$

因为 Ω 是有界域, 存在充分大的 R, 使以 Ω 中任意点 z 为中心, R 为半径的圆盘均能盖住 Ω. 由于 $d\lambda = dx + idy$, $d\bar{\lambda} = dx - idy$, $d\bar{\lambda} \wedge d\lambda = 2i dx \wedge dy$, 所以对任意 $z \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned}
|u(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} \frac{|f(\lambda)|}{|\lambda - z|} |d\lambda \wedge d\bar{\lambda}| \\
&\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{B(z,R)} \frac{dx dy}{r} = 2R\|f\|_\infty. \square
\end{aligned}$$

注意, 因为 $\bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{\lambda}} d\bar{\lambda} = f d\bar{\lambda}$, 定理 4.7.2 中的 u 实际上给出了右端为 (0, 1) 形式 $f d\bar{\lambda}$ 的 $\bar{\partial}$ 问题的解, 而且给出了解的一致估计

$$\|u\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty.$$

4.7.3 具有紧支集的$\bar\partial$问题

定理4.7.1也可用来解决高维的具有紧支集的$\bar\partial$问题.

定义 4.7.3 设 $f = \sum_{|I|=p}\sum_{|J|=q} f_{IJ}(z)dz_I \wedge d\bar z_J$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的(p,q)形式，各系数 f_{IJ}的支集的并称为 f 的支集，即

$$\operatorname{supp} f = \bigcup_{I,J}\operatorname{supp} f_{IJ}.$$

定理 4.7.4 设 $n>1$，$f=\sum_{j=1}^n f_j(z)\,d\bar z_j$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的$(0,1)$形式，$f_j\in C^1(\mathbf{C}^n)$，$j=1,\cdots,n$. 如果 f 具有紧支集 K，且满足 $\bar\partial f=0$. 记 $\mathbf{C}^n\setminus K$ 的无界部分为 Ω_0，那么存在唯一的函数 $u\in C^1(\mathbf{C}^n)$，使得 $\bar\partial u=f$，且在 Ω_0 上有 $u\equiv 0$.

证 定义

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}} f_1(\lambda,z_2,\cdots,z_n)\frac{d\lambda\wedge d\bar\lambda}{\lambda-z_1},z\in\mathbf{C}^n.$$

若记 $\lambda-z_1=\zeta$，则上式也可写为

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}} f_1(z_1+\zeta,z_2,\cdots,z_n)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta}.$$

从 $f_1\in C^1(\mathbf{C}^n)$ 即知 $u\in C^1(\mathbf{C}^n)$. 由定理4.7.2知$\frac{\partial u}{\partial\bar z_1}=f_1$. 现在要证明$\frac{\partial u}{\partial\bar z_j}=f_j$，$j=2,\cdots,n$. 由于

$$\bar\partial f = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial\bar z_k}d\bar z_k\wedge d\bar z_j = \sum_{k<j}\left(\frac{\partial f_j}{\partial\bar z_k}-\frac{\partial f_k}{\partial\bar z_j}\right)d\bar z_k\wedge d\bar z_j,$$

故从 $\bar\partial f=0$ 得 $\frac{\partial f_j}{\partial\bar z_k}=\frac{\partial f_k}{\partial\bar z_j}$. 于是对于 $j=2,\cdots,n$ 有

$$\frac{\partial u}{\partial\bar z_j}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}}\frac{\partial f_1}{\partial\bar z_j}(\lambda,z_2,\cdots,z_n)\frac{d\lambda\wedge d\bar\lambda}{\lambda-z_1}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}}\frac{\partial f_j}{\partial\bar z_1}(\lambda,z_2,\cdots,z_n)\frac{d\lambda\wedge d\bar\lambda}{\lambda-z_1} = f_j(z).$$

最后的等式用了定理 4.7.1 和 f 具有紧支集的条件．这就证明了 $\bar{\partial}u=f$. 因为 f 具有紧支集 K，故在 Ω_0 中当然有 $f=0$，即 $\bar{\partial}u=0$，所以 u 在 Ω_0 中全纯．因为 K 是紧的，只要 $|z_2|$ 充分大，$(z_1, z_2, \cdots, z_n)\notin K$，便有 $u(z)=0$. 由 Ω_0 的连通性即知 $u|_{\Omega_0}=0$. 现在容易证明 u 的唯一性．如果有另一个 u_1 也满足 $\bar{\partial}u_1=f$，那么 $\bar{\partial}(u-u_1)=0$，即 $u-u_1\in H(\mathbf{C}^n)$，由于在 Ω_0 上有 $u-u_1=0$，由唯一性定理得 $u\equiv u_1$ 在 $\mathbf{C}^n$ 上成立，唯一性得证．□

4.7.4 Hartogs 全纯开拓定理

定理 4.7.4 可以用来证明下列重要的 Hartogs 全纯开拓定理．

定理 4.7.5 设 $n>1$，Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，K 是 Ω 中的紧集．如果 $\Omega-K$ 是连通的，那么每一个 $\Omega-K$ 上的全纯函数都可全纯开拓到 Ω 上去．

证 设 f 是 $\Omega-K$ 上的一个全纯函数．取 K 的邻域 V，使得 $K\subset V\subset\Omega$. 由推论 4.6.6，存在 $\varphi\in C^\infty(\mathbf{C}^n)$，使得 $\varphi|_V\equiv 1$，且 φ 有紧支集 $K_0\subset\Omega$. 定义

$$g=\begin{cases} f\bar{\partial}\varphi, & \text{在 } \Omega-K \text{ 上},\\ 0, & \mathbf{C}^n \text{ 的其余处}. \end{cases}$$

因为在 V 及 $\mathbf{C}^n-K_0$ 上 $\bar{\partial}\varphi=0$，所以 g 是一个系数为 C^∞ 函数且支集落在 K_0 中的 $\mathbf{C}^n$ 中的 $(0, 1)$ 形式．设 Ω_0 是 $\mathbf{C}^n-K_0$ 的无界部分，那么由定理 4.7.4，$\bar{\partial}$ 问题 $\bar{\partial}u=g$ 的解 u 在 Ω_0 上恒等于 0. 定义

$$h=\begin{cases} u+(1-\varphi)f, & \text{在 } \Omega-K \text{ 上},\\ u, & \text{在 } V \text{ 上}. \end{cases}$$

因为 $\varphi|_V=1$，所以 h 是在 Ω 上有定义的函数，且 $h\in C^\infty(\Omega)$．事实上，$h\in H(\Omega)$，这是因为在 V 上，$\bar{\partial}h=\bar{\partial}u=g=0$，而在 $\Omega-K$ 上，因为 $f\in H(\Omega-K)$，所以

$$\bar{\partial}h=\bar{\partial}u-\bar{\partial}(\varphi f)=\bar{\partial}u-f\bar{\partial}\varphi=g-g=0.$$

现在证明 $h|_{\Omega-K}=f$. 因为在 $\Omega_0\cap(\Omega-K)$ 上，$u=0$，$\varphi=0$，所以 $h=f$. 因为 K 是紧的，所以 $\Omega_0\cap(\Omega-K)$ 不空，且 $\Omega-K$ 是连通的．由全纯函数的唯一性定理知道 $h=f$ 在 $\Omega-K$ 上成立．□

定理 4.7.5 是推论 1.3.6 的推广．粗略地说，当 $n>1$ 时，有“洞”的域上的全纯函数都能全纯开拓到“洞”中去；或者说全纯域是没有“洞”的．这是多复变和单复变的一个重要区别．

§4.8 Bochner-Martinelli 积分公式

现在我们要把定理 4.7.1 推广到 $\mathbf{C}^n$，建立 $\mathbf{C}^n$ 中连续可微函数的 Cauchy 积分公式．

设 z，ζ 是 $\mathbf{C}^n$ 中两个点，我们称

$$K_{B-M}(z,\zeta)=\frac{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(\bar\zeta_j-\bar z_j)d\bar\zeta_1\wedge\cdots\wedge[j]\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n}{|\zeta-z|^{2n}}$$

为 Bochner-Martinelli 核，它是关于 ζ 的 $(n,n-1)$ 形式．

当 $n=1$ 时，

$$K_{B-M}(z,\zeta)=\frac{(\bar\zeta-\bar z)d\zeta}{|\zeta-z|^2}=\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

它就是单复变中的 Cauchy 核．

引进记号

$$\omega(z)=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n,$$

$$\eta(z)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}z_j dz_1\wedge\cdots\wedge[j]\wedge\cdots\wedge dz_n,$$

那么 Bochner-Martinelli 核可简单地表为

$$K_{B-M}(z,\zeta)=\frac{\eta(\bar\zeta-\bar z)\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}},$$

这里η有时也称为 Leray 形式．

引理 4.8.1 设$a\in\mathbf{C}^n$，对任意$\varepsilon>0$有

$$\int_{\partial B(a,\varepsilon)}\eta(\zeta)\wedge\omega(\zeta)=nc_n\varepsilon^{2n}. \tag{1}$$

这里$c_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(2\pi i)^n}{n!}$.

证 容易知道

$$\begin{aligned}\bar\partial\eta(\bar\zeta)&=\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\sum_{k=1}^n\frac{\partial\bar\zeta_j}{\partial\bar\zeta_k}d\bar\zeta_k\wedge d\bar\zeta_1\wedge\cdots\wedge[j]\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\\&=\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}d\bar\zeta_j\wedge d\bar\zeta_1\wedge\cdots\wedge[j]\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\\&=n\omega(\bar\zeta).\end{aligned}$$

利用 Stokes 公式即得

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(a,\varepsilon)}\eta(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)&=\int_{B(a,\varepsilon)}d(\eta(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta))=\int_{B(a,\varepsilon)}\bar\partial(\eta(\zeta)\wedge\omega(\zeta))\\&=\int_{B(a,\varepsilon)}(\bar\partial\eta(\bar\zeta))\wedge\omega(\zeta)=n\int_{B(a,\varepsilon)}\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta).\end{aligned}\tag{2}$$

由于$d\bar\zeta_j\wedge d\zeta_j=(dx_j-idy_j)\wedge(dx_j+idy_j)=2idx_j\wedge dy_j$，所以

$$\begin{aligned}\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)&=d\bar\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2i)^n dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2i)^n dm_{2n},\end{aligned}$$

这里dm_{2n}是$\mathbf{R}^{2n}$中的 Lebesgue 测度．于是

$$\begin{aligned}\int_{B(a,\varepsilon)}\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2i)^n m_{2n}(B(a,\varepsilon))\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(2\pi i)^n}{n!}\varepsilon^{2n}=c_n\varepsilon^{2n}.\end{aligned}$$

把它代入(2)即得(1)．□

下面是定理 4.7.1 在 $\mathbf{C}^n$ 中的推广.

定理 4.8.2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的有界域. 如果 $f\in C^1(\overline{\Omega})$, 那么对每个 $z\in\Omega$ 有

$$f(z)=\frac{1}{nc_n}\int_{\partial\Omega}f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta)-\frac{1}{nc_n}\int_{\Omega}(\bar{\partial}f)\wedge K_{B-M}(z,\zeta). \quad (3)$$

(3) 式称为 Bochner-Martinelli 积分公式.

证 证明的方法和证明定理 4.7.1 完全一样. 固定 $z\in\Omega$, 取充分小的 $\varepsilon>0$, 使得 $B(z,\varepsilon)\subset\Omega$. 记 $\Omega_\varepsilon=\Omega-\overline{B}(z,\varepsilon)$. 容易知道 $\partial\Omega_\varepsilon=\partial\Omega\cup\partial B(z,\varepsilon)$. 对形式 $f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta)$ 在 Ω_ε 上用 Stokes 公式得

$$\int_{\partial\Omega}f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta)-\int_{\partial B(z,\varepsilon)}f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta)=\int_{\Omega_\varepsilon}d(f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta)) \quad (4)$$

现在来计算(4)右端的被积形式. 由于 $K_{B-M}(z,\zeta)$ 是 $(n,n-1)$ 形式, 所以 $\partial(f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta))=0$, 因而有

$$\begin{aligned}d(f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta))&=\bar{\partial}(f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta))\\&=\bar{\partial}f(\zeta)\wedge K_{B-M}(z,\zeta)+f(\zeta)\bar{\partial}K_{B-M}(z,\zeta).\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\bar{\partial}K_{B-M}(z,\zeta)&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_j}\left(\frac{\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j}{|\zeta-z|^{2n}}\right)\omega(\bar{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\\&=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{|\zeta-z|^{2n}}-n\frac{|\zeta_j-z_j|^2}{|\zeta-z|^{2n+2}}\right\}\omega(\bar{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\\&=\left(\frac{n}{|\zeta-z|^{2n}}-\frac{n}{|\zeta-z|^{2n}}\right)\omega(\bar{\zeta})\wedge\omega(\zeta)=0,\end{aligned}$$

所以 $d(f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta))=\bar{\partial}f(\zeta)\wedge K_{B-M}(z,\zeta)$, 代入 (4) 得

$$\int_{\partial\Omega}f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta)-\int_{\partial B(z,\varepsilon)}f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta)$$

$$= \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge K_{B-M}(z,\zeta). \tag{5}$$

写

$$\int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\zeta) K_{B-M}(z,\zeta) = f(z) \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{(f(\zeta) - f(z))\eta(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} = I_1 + I_2.$$

由引理 4.8.1 知道 $I_1 = nc_n f(z)$. 由于 $f \in C^1(\bar{\Omega})$，所以当 $\zeta \in \partial B(z,\varepsilon)$ 时，有 $|f(\zeta) - f(z)| \leqslant C|\zeta - z|$，仍由引理 4.8.1 得 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_2 = 0$. 因而

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\zeta) K_{B-M}(z,\zeta) = nc_n f(z). \tag{6}$$

在（5）中命 $\varepsilon \to 0$，利用（6）即得（3）. □

推论 4.8.3 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的有界域，如果 $f \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H(\Omega)$，那么对任意 $z \in \Omega$ 有

$$f(z) = \frac{1}{nc_n} \int_{\partial\Omega} f(\zeta) K_{B-M}(z,\zeta). \tag{7}$$

证 因为 $f \in C^1(\bar{\Omega})$，所以(3)成立. 又因 $f \in H(\Omega)$，$\bar{\partial} f = 0$，从（3）即得（7）. □

公式（7）用全纯函数的边界值表示了全纯函数，而且积分核 $K_{B-M}(z,\zeta)$ 不因域而异，它是一种 Cauchy 积分公式. 但是它有一个明显的缺点，核 $K_{B-M}(z,\zeta)$ 不是 z 的全纯函数. 因此对一般的 f 而言，积分

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta) K_{B-M}(z,\zeta)$$

不一定表示全纯函数，这是和单复变的 Cauchy 积分公式的最大的不同之处. 正是由于这个原因，公式（3）不能用来解 $n>1$ 时

的 $\bar{\partial}$ 问题．我们将在 § 6.7 中对这一问题作进一步的讨论．

[注记]

Cauchy 积分公式在复分析中的重要性是众所周知的．在多复变中，它首先被推广到多圆柱（定理 1.2.1）．正如我们在第一章中已经看到的，用这个公式可以把单复变中很多结果推广到多复变．这是一个比较老的结果．但人们很长时间不知道球的 Cauchy 积分公式是什么样子，直到本世纪 50 年代中期，华罗庚教授 [Hua] 得到了四类典型域的 Cauchy 积分公式，作为第一类典型域的一种特殊情形，人们才得到球的 Cauchy 积分公式，1964 年 Bungart [Bu] 又重新独立地得到了这个公式．这里的证明选自 [Ru2]．华罗庚教授通过群表示论的方法，直接计算出四类典型域上的完备正交系，同时又在它们的特征边界上规范正交，从而获得四类典型域的 Cauchy 核．关于连续可微函数的 Cauchy 积分公式（定理 4.7.1）首先是由 D. Pompeiu 在 1912 年证明的，但长期以来似乎被人们遗忘了．直到 1950 年，A. Grothendieck 和 P. Dolbeault 用它来解单复变的非齐次 Cauchy-Riemann 方程（即定理 4.7.2）时，人们才发现它的意义所在．关于 Hartogs 全纯开拓定理（定理 4.7.5），我们这里采用的是 L. Ehrenpreis [Eh] 的证明，他用具有紧支集的 $\bar{\partial}$ 问题的解（定理 4.7.4）作为工具．这一定理的其它证明方法可参见 [Rn，p. 159] 或 [Bo]. Pompeiu 公式（定理 4.7.1）在 $\mathbf{C}^n$ 中的推广，即 Bochner-Martinelli 积分公式首先于 1938 年由 E. Martinelli 得到，后于 1941 年又被 S. Bochner 重新独立地得到．这个公式的最大缺点，正如正文中所指出的那样，它的积分核不是 z 的全纯函数．在 § 6.7 中我们将要通过它来构造一个对 z 全纯的核，也只有在构造出全纯的核之后，积分表示理论才能成为多复变中一个有用的工具．这一点在第六章中将得到进一步的阐明．关于积分表示的理论可参阅 [Rn]．

第五章　全纯凸域和拟凸域

在§1.3中，我们介绍了多复变中一种与单复变有本质差异的现象——Hartogs现象．也就是说，当$n>1$时，在$\mathbf{C}^n$中存在这样一种域．其上的所有全纯函数都可全纯开拓到比它更大的域中去．在复平面$\mathbf{C}$上，这样的域是不存在的．我们把不发生Hartogs现象的域称为全纯域．即若不存在比Ω更大的域Ω'，使得$H(\Omega)$中所有函数都能全纯开拓到Ω'中去，就称Ω为全纯域．在§1.3中，我们还证明了，欧氏凸域一定是全纯域．但全纯域未必是欧氏凸的．在本章中，我们要引进全纯凸域和拟凸域的概念，它们恰好都刻画了全纯域．

§5.1　全纯凸域

5.1.1　欧氏凸域的特征

在引进全纯凸域的概念之前，我们再深入讨论一下欧氏凸域．为方便起见，我们只讨论复平面上的凸域．从解析几何中知道，平面上一条直线$l(z)=ax+by+c=0$把平面分成两部分：

$$H_l^+=\{z\in\mathbf{C}:l(z)>0\},H_l^-=\{z\in\mathbf{C}:l(z)<0\}.$$

现在利用上面这种术语给出平面上欧氏凸域的定义．

定义5.1.1　设G是$\mathbf{C}$的一个子集．如果对每个$z_0\in\mathbf{C}-G$，存在通过z_0的直线l，使得$G\subset H_l^-$，G就称为**欧氏凸域**．

下面给出集合G的几何凸包的概念．

定义5.1.2　设G是$\mathbf{C}$的一个子集，称

$$\hat{G}=\{z\in \mathbf{C}: l(z)\leqslant \sup_{\zeta\in G} l(\zeta),\ 对所有实线性函数\ l\}$$

为 G 的**几何凸包**.

G 的几何凸包有下列简单性质.

命题 5.1.3 设 $G\subset \mathbf{C}$ 是任一子集，则

(i) $G\subset \hat{G}$；

(ii) $\hat{G}$ 是闭的和欧氏凸的；

(iii) 如果 G 是闭的和欧氏凸的，那么 $G=\hat{G}$；

(iv) $\hat{\hat{G}}=\hat{G}$；

(v) 设 $G_1\subset G_2\subset \mathbf{C}$，则 $\hat{G}_1\subset \hat{G}_2$.

证 (i) 从 $\hat{G}$ 的定义即明.

(ii) 我们证明 $\mathbf{C}-\hat{G}$ 是开的. 任取 $z_0\in \mathbf{C}-\hat{G}$. 因为 $z_0\notin \hat{G}$，故存在 $l\in L$，这里 L 是实线性函数的全体，使得 $l(z_0)>\sup_{\zeta\in G} l(\zeta)$. 因为 l 是连续的，所以 $l(z)>\sup_{\zeta\in G} l(\zeta)$ 在 z_0 的一个邻域中成立，因而 $\mathbf{C}-\hat{G}$ 是开的，即 $\hat{G}$ 是闭的. 为了证明 $\hat{G}$ 是欧氏凸的，取 z_0 和 l 如上. 记 $l^*(z)=l(z)-l(z_0)$，则直线 $g=\{z\in \mathbf{C}: l^*(z)=0\}$ 通过 z_0，且当 $z\in \hat{G}$ 时，

$$l^*(z)\leqslant \sup_{\zeta\in G} l^*(\zeta)=\sup_{\zeta\in G} l(\zeta)-l(z_0)<0,$$

即 $\hat{G}\subset H_g^-$，因而 $\hat{G}$ 是欧氏凸的.

(iii) 已知 $G\subset \hat{G}$，现证 $\hat{G}\subset G$. 任取 $z_0\in \hat{G}$，如果 $z_0\notin G$，因为 G 是闭的，所以存在 $z_1\in G$，使得 z_1 离 z_0 的距离最短. 记线段 z_0z_1 的中点为 z_2，则因 z_2 离 z_0 比 z_1 离 z_0 更近，所以 $z_2\notin G$. 由于 G 是欧氏凸的，存在 $l\in L$，使得 $l(z_2)=0$，$G\subset H_l^-$，即 $l(z)<0$ 对所有 $z\in G$ 成立. 但 $l(z_0)>0$，因而 $z_0\notin \hat{G}$，这是矛盾.

(iv) 从 (ii) 和 (iii) 即得.

(v) 因为对所有 $l\in L$，有 $\sup_{\zeta\in G_1} l(\zeta)\leqslant \sup_{\zeta\in G_2} l(\zeta)$，

由此即得 $\hat{G}_1\subset\hat{G}_2$.

推论 5.1.4 $\hat{G}$ 是包含 G 的最小的闭欧氏凸集.

证 如果 $G\subset M$，M 是闭的欧氏凸集，那么由命题 5.1.3 的 (v) 和 (iii) 得 $\hat{G}\subset\hat{M}=M$. □

推论 5.1.5 如果 G 是有界的，那么 $\hat{G}$ 也是有界的.

证 因为 G 是有界的，必有一闭矩形 Q 使得 $G\subset Q$. 因为 Q 是闭的欧氏凸集，故由推论 5.1.4，$\hat{G}\subset Q$，即 $\hat{G}$ 是有界的. □

命题 5.1.6 设 $G\subset\mathbf{C}$ 是一个开集，那么 G 是欧氏凸的充分必要条件是从 $K\subset\subset G$ 能推出 $\hat{K}\subset\subset G$.

回忆一下，记号 $K\subset\subset G$ 是指 K 相对于 G 是紧的，即 $\overline{K}$ 是紧的，且 $\overline{K}\subset G$ (见定义 1.2.4).

证 必要性 设 G 是欧氏凸的，且 $K\subset\subset G$. 因为 $\overline{K}$ 是紧的，所以 K 有界. 从命题 5.1.3 (ii) 和推论 5.1.5 知道 $\hat{K}$ 是有界的且是闭的，因而是紧的. 现在证明 $\hat{K}\subset G$. 如果存在 $z_0\in\hat{K}-G$，因为 G 是欧氏凸的，所以存在 $l\in L$，使得 $l(z_0)=0$，对 $\forall z\in G$ 有 $l(z)<0$. 由于 $\overline{K}\subset G$，且 $\overline{K}$ 是紧的，所以

$$\sup_{z\in K}l(z)\leqslant\sup_{z\in\overline{K}}l(z)<0=l(z_0).$$

这和 $z_0\in\hat{K}$ 相矛盾. 因而 $\hat{K}\subset G$.

充分性 如果 $K\subset\subset G$ 蕴含 $\hat{K}\subset\subset G$，我们要证 G 是欧氏凸的. 我们知道，过 z_0 的直线 g 可用复数表示为 $g=\{z: z=z_0+ta, t\in\mathbf{R}. a$ 是一个固定的复数$\}$. 我们用 g^+ 和 g^- 分别表示 g 的正、负射线，即

$$g^+=\{z: z=z_0+ta, t\geqslant 0\},\ g^-=\{z: z=z_0+ta, t\leqslant 0\}.$$

现取 $z_0\notin G$，我们证明过 z_0 的每条直线 g，或者 $g^-\cap G=\varnothing$，或者 $g^+\cap G=\varnothing$. 不然的话，存在这样的 g，使得 $g^+\cap G\neq\varnothing$，$g^-\cap G\neq\varnothing$，设

$$z_1 = z_0 + t_1 a \in g^- \cap G,$$

$$z_2 = z_0 + t_2 a \in g^- \cap G.$$

命 $p_1 = \frac{-t_2}{t_1 - t_2} > 0$，$p_2 = 1 - p_1 = \frac{t_1}{t_1 - t_2} > 0$，则 $p_1 z_1 + p_2 z_2 = z_0$. 设 $l \in L$ 是任意线性函数，我们证明

$$l(z_0) \leqslant m = \max(l(z_1), l(z_2)).$$

不妨设 $l(z) = ax + by$ 是齐次的（因为对非齐次的只要加上常数就行），于是

$$\begin{aligned} l(z_0) &= l(p_1 z_1 + p_2 z_2) = p_1 l(z_1) + p_2 l(z_2) \\ &\leqslant m(p_1 + p_2) = m. \end{aligned}$$

现在命 $K = \{z_1, z_2\}$，则 $K \subset\subset G$，因而 $\hat{K} \subset\subset G$. 因为对每个 $l \in L$ 均有

$$l(z_0) \leqslant \max(l(z_1), l(z_2)) = \sup_{z \in K} l(z),$$

所以 $z_0 \in \hat{K}$，这和 $z_0 \notin G$ 相矛盾. 这样我们就证明了过 $z_0 \notin G$ 的每一条直线最多只能有半条和 G 相交. 绕 z_0 适当转动这种直线，即可得到和 G 不相交的直线 g，且使 $G \subset H_g^-$. 因而 G 是欧氏凸域.

□

命题 5.1.6 可以用来作为欧氏凸域的定义.

5.1.2 全纯凸域及其特征

现在回到全纯域，从全纯域的定义可以看出，一个全纯域经过全纯坐标变换后所得的域仍然是全纯域，但欧氏凸域却没有这个性质. 从命题 5.1.6 的角度来看，由于定义几何凸包时用的是线性函数，它在全纯坐标变换下当然不再保持线性了. 如果把线性函数换成全纯函数，这种在全纯坐标变换下的不变性便可保持，这就引出全纯凸域的概念.

定义 5.1.7 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集，$K \subset G$ 是 G 的一个子集，称

$$\hat{K}=\{z\in G:\ |f(z)|\leqslant\sup_{\zeta\in K}|f(\zeta)|,\text{对每一个 } f\in H(G)\}$$

为 K 在 G 中的**全纯凸包**.

和几何凸包一样，全纯凸包也有下面的简单性质.

命题 5.1.8 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集，K 是 G 的子集，那么

(i) $K\subset\hat{K}$；

(ii) $\hat{K}$ 是 G 中的闭集；

(iii) $\hat{\hat{K}}=\hat{K}$；

(iv) 如果 $K_1\subset K_2\subset G$，那么 $\hat{K}_1\subset\hat{K}_2\subset G$；

(v) 如果 K 有界，那么 $\hat{K}$ 也有界.

证 (i) 显然.

(ii) 和命题 5.1.3 (ii) 一样，证明 $G-\hat{K}$ 是开集.

(iii) 由 (i) 知 $\hat{K}\subset\hat{\hat{K}}$. 因为当 $z\in\hat{K}$ 时，对任意 $f\in H(G)$ 有 $|f(z)|\leqslant\sup\limits_{\zeta\in K}|f(\zeta)|$，所以 $\sup\limits_{z\in\hat{K}}|f(z)|\leqslant\sup\limits_{\zeta\in K}|f(\zeta)|$ 对任意 $f\in H(G)$ 成立. 现在任取 $z\in\hat{\hat{K}}$，则

$$|f(z)|\leqslant\sup_{\zeta\in\hat{K}}|f(\zeta)|\leqslant\sup_{\zeta\in K}|f(\zeta)|,$$

即 $z\in\hat{K}$，所以 $\hat{\hat{K}}\subset\hat{K}$.

(iv) 若取 $z\in\hat{K}_1$，则对每个 $f\in H(G)$ 有

$$|f(z)|\leqslant\sup_{\zeta\in K_1}|f(\zeta)|\leqslant\sup_{\zeta\in K_2}|f(\zeta)|,$$

即 $z\in\hat{K}_2$，由此得 $\hat{K}_1\subset\hat{K}_2$.

(v) 如果 K 有界，则必存在 $R>0$ 使得

$$K\subset\{z=(z_1,\cdots,z_n):|z_j|\leqslant R,\ j=1,\cdots,n\}.$$

命 $f_k(z)=z_k$，则 $f_k\in H(G)$. 于是当 $z\in\hat{K}$ 时，有

$$|z_k|=|f_k(z)|\leqslant\sup_K|f_k(z)|=\sup_K|z_k|\leqslant R.$$

所以 $\hat{K}$ 是有界的. □

现在给出全纯凸域的定义.

定义 5.1.9 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集. 如果对任意 $K\subset G$, 从 $K\subset\subset G$ 能推出 $\hat{K}\subset\subset G$, 就称 G 是**全纯凸的**.

从命题 5.1.6 我们自然猜想到全纯域就是全纯凸域, 这个猜想是完全正确的, 它的证明将在下节中给出. 下面先给出判断一个域是否全纯凸域的充分必要条件. 为此先证明几个引理.

在引理 4.6.4 中已经证明, 如果 $G\subset\mathbf{C}^n$ 是一个开集, 那么一定存在 G 的一个正规穷竭 $\{K_j\}$, 即 $\{K_j\}$ 是满足下面三个条件的 G 的一列子集:

(i) K_j 是紧的, $j=1, 2, \cdots$

(ii) $\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j=G$;

(iii) $K_j\subset\mathring{K}_{j+1}$, $j=1, 2, \cdots$

如果 G 是全纯凸的, 我们还可要求 $K_j=\hat{K}_j$. 这就是下面的

引理 5.1.10 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集. 如果 G 是全纯凸的, 那么一定存在 G 的一个正规穷竭 $\{K_j\}$, 使得

$$K_j=\hat{K}_j,\ j=1, 2, \cdots$$

证 设 $\{K_j\}$ 是 G 的一个正规穷竭, 那么对每个 j, 都有 $K_j\subset\subset G$, 因为 G 是全纯凸的, 所以 $\hat{K}_j\subset\subset G$, 因而 $\hat{K}_j$ 是 G 的紧子集. 今用归纳法构造一列新子集. 命 $K_1^*=\hat{K}_1$, 则 $\hat{K}_1^*=\hat{\hat{K}}_1=\hat{K}_1=K_1^*$. 现假定 K_1^*, $\cdots$, K_{j-1}^* 已定义好, 它们满足 K_l^* 是紧的且 $\hat{K}_l^*=K_l^*$, $l=1, \cdots, j-1$. 对于 K_{j-1}^*, 一定存在充分大的正整数 $\lambda(j)$, 使得 $K_{j-1}^*\subset\mathring{K}_{\lambda(j)}$. 今定义 $K_j^*=\hat{K}_{\lambda(j)}$, 则 $\hat{K}_j^*=\hat{\hat{K}}_{\lambda(j)}=\hat{K}_{\lambda(j)}=K_j^*$, 且 K_j^* 是紧的, 而且

$$K_j^*\subset\mathring{K}_{\lambda(j+1)}\subset\mathring{\hat{K}}_{\lambda(j+1)}=\mathring{K}_{j+1}^*,$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j^*=\bigcup_{j=1}^{\infty}\hat{K}_{\lambda(j)}\supset\bigcup_{j=1}^{\infty}K_{\lambda(j)}=G.$$

因此 $\{K_j^*\}$ 就是要找的一列子集. □

引理 5.1.11 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集，K 是 G 的一个子集. 对于任意给定的正数 ε，M 和 $p\in G-\hat{K}$，存在 $f\in H(G)$，使得 $\sup\limits_{z\in K}|f(z)|<\varepsilon, |f(p)|>M$.

证 因为 $p\notin\hat{K}$，故必存在 $h\in H(G)$，使得

$$|h(p)|>\sup_{z\in K}|h(z)|.$$

取 s 满足 $|h(p)|>s>\sup\limits_{z\in K}|h(z)|$，并命 $g(z)=\frac{1}{s}h(z)$，那么 $|g(p)|>1, \sup\limits_{z\in K}|g(z)|<1$. 于是，取充分大的自然数 m，$f(z)=g^m(z)$ 就是所要的函数. □

引理 5.1.12 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集，$\{K_j\}$ 是 G 的一个正规穷竭，满足 $K_j=\hat{K}_j$，$j=1, 2, \cdots$ 如果 $p_j\in K_{j+1}-K_j$，$j=1, 2, \cdots$ 那么存在 $f\in H(G)$，使得 $\lim\limits_{j\to\infty}|f(p_j)|=\infty$.

证 我们用数学归纳法来构造一列全纯函数 $\{f_j\}$，使得它们满足下面两个条件：

(i) $\sup\limits_{z\in K_j}|f_j(z)|<2^{-j}$，$j=1, 2, \cdots$

(ii) $|f_j(p_j)|>j+1+\sum\limits_{l=1}^{j-1}|f_l(p_j)|, j=2,3,\cdots$

取 $f_1=0$，对于 $l\geqslant 2$，假定满足 (i)、(ii) 的 $f_1, \cdots, f_{l-1}$ 已经取到. 因为 $p_l\notin\hat{K}_l$，根据引理 5.1.11，一定存在 $f_l\in H(G)$，使得

$$\sup_{z\in K_l}|f_l(z)|<2^{-l}, |f_l(p_l)|>l+1+\sum_{k=1}^{l-1}|f_k(p_l)|.$$

这就证明了满足 (i)、(ii) 的函数列是存在的. 从 (i) 知道级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}f_j$ 在 G 中内闭一致收敛. 设其和为 f，则 $f\in H(G)$. 我们证明 f 就是要找的函数. 事实上，由 (ii) 可得

$$|f(p_j)|\geqslant|f_j(p_j)|-\sum_{l\neq j}|f_l(p_j)|>j+1-\sum_{l=j+1}^{\infty}|f_l(p_j)|.$$

但由 (i)，

$$\sum_{l=j+1}^{\infty}|f_l(p_j)|<\sum_{l=j+1}^{\infty}2^{-l}\leqslant 1.$$

由此即得 $|f(p_j)|>j$，即 $\lim\limits_{j\to\infty}|f(p_j)|=\infty$. □

现在很容易证明

定理 5.1.13 $\mathbf{C}^n$ 中的域 G 是全纯凸域的充分必要条件是，对每一个趋于边界 ∂G 的点列 $\{p_j\}$，存在 $f\in H(G)$，使得 $\{f(p_j)\}$ 无界.

证 充分性 如果 G 不是全纯凸的，则必存在 G 中的紧集 K，使得 $\hat{K}$ 不紧，因而有 $\{p_j\}\subset\hat{K}$，$p_j\to\partial G$. 但因 K 是紧的，故有

$$|f(p_j)|\leqslant\sup_K|f|=M<\infty$$

对每一个 $f\in H(G)$ 成立，这和假设相矛盾.

必要性 因为 G 是全纯凸的，根据引理 5.1.10，存在 G 的一个正规穷竭 $\{K_j\}$，使得 $K_j=\hat{K}_j$，$j=1, 2, \cdots$ 现设 $\{p_j\}$ 是任一给定的趋于 ∂G 的点列，我们证明存在 $\{p_j\}$ 的子列 $\{p_{j_k}\}$ 和严格递增的 $\lambda(k)\in\mathbf{N}$，使得

$$p_{j_k}\in K_{\lambda(k)}-K_{\lambda(k)-1}.$$

事实上，在 $\{p_j\}$ 中任取一点，记作 p_{j_1}，记 $\lambda(1)\in\mathbf{N}$ 是具有 $p_{j_1}\in K_{\lambda(1)}$ 性质的最小足标，因而 $p_{j_1}\in K_{\lambda(1)}-K_{\lambda(1)-1}$. 因为 $\{p_j\}\cap K_{\lambda(1)}$ 是有限集，故可取 $p_{j_2}\in\{p_j\}-K_{\lambda(1)}$. 再设 $\lambda(2)$ 是具有 $p_{j_2}\in K_{\lambda(2)}$ 性质的最小的足标，则 $\lambda(2)>\lambda(1)$，且 $p_{j_2}\in K_{\lambda(2)}-K_{\lambda(2)-1}$. 这个过程一直进行下去，便可得到所需的 $\{p_{j_k}\}$ 和 $\{K_{\lambda(k)}\}$. 由于 $p_{j_k}\in K_{\lambda(k)}-K_{\lambda(k)-1}$，由引理 5.1.12，即知所需的函数存在. □

利用这个定理，马上可以判断某些域是全纯凸的.

命题 5.1.14 复平面上的每一个域都是全纯凸域.

证 设 G 是 $\mathbf{C}$ 中的域，$\{p_j\}$ 是 G 中一列趋于 ∂G 的点. 如果 $\{p_j\}$ 无界，那么函数 $f(z)=z$ 在 $\{p_j\}$ 上无界. 如果 $\{p_j\}$ 趋于 ∂G 上某点 p，那么函数 $f(z)=(z-p)^{-1}$ 在 $\{p_j\}$ 上无界. 由定理

5.1.13，G 是全纯凸域. □

命题 5.1.15 $\mathbf{C}^n$ 中的欧氏凸域一定是全纯凸域.

证 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的欧氏凸域，对于每点 $p\in\partial G$，用定理 1.3.10 的证明方法可以证明存在 $g\in H(G)$，它在 G 中没有零点，但 $g(p)=0$，因而 $f=g^{-1}\in H(G)$，但 f 在任意趋于 p 的点列 $\{p_j\}$ 上无界. 由定理 5.1.13，G 是全纯凸域. □

最后举一个非全纯凸域的例子.

例 5.1.16 当 $n>1$ 时，域 $G=\{z\in\mathbf{C}^n:\ 1<|z|<2\}$ 不是全纯凸域.

证 取 $K=\{z\in\mathbf{C}^n:\ |z|=\dfrac{3}{2}\}$，则 $K\subset\subset G$. 由推论 1.3.6 知道，每个 $f\in H(G)$ 都能全纯开拓到球 $B(0,2)$，即存在 $B(0,2)$ 上的全纯函数 F. 当 $z\in G$ 时，$F(z)=f(z)$. 由最大模原理，当 $1<|z|\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时，

$$
\begin{aligned}
|f(z)|=|F(z)|&\leqslant\sup_{|\zeta|=\frac{3}{2}}|F(\zeta)|\\
&=\sup_{|\zeta|=\frac{3}{2}}|f(\zeta)|=\sup_{\zeta\in K}|f(\zeta)|,
\end{aligned}
$$

这说明 $\left\{z\in G:\ |z|\leqslant\dfrac{3}{2}\right\}\subset\hat{K}$，故 $\hat{K}$ 的闭包不在 G 中，所以 G 不是全纯凸域. □

§ 5.2 Cartan-Thullen 定理

这一节讨论全纯凸域和全纯域的关系，我们将证明它们是等价的.

5.2.1 全纯域一定是全纯凸域

设 $z,w\in\mathbf{C}^n$，记 $d(z,w)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|z_j-w_j|$. 若 A，B 是 $\mathbf{C}^n$ 中的两个集合，定义

$$d(A,B)=\inf\{d(z,w):z\in A,w\in B\}.$$

我们首先证明全纯域一定是全纯凸的，证明的关键是下面的全纯凸包的一个重要的几何性质.

定理 5.2.1 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯域，$K\subset\subset G$，那么

$$d(K,\mathbf{C}^n-G)=d(\hat{K},\mathbf{C}^n-G). \tag{1}$$

证 因为 $K\subset\subset G$，所以 $d(K,\mathbf{C}^n-G)>0$. 取 ε，使得 $d(K,\mathbf{C}^n-G)>\varepsilon>0$. 作

$$K_\varepsilon=\{z\in\mathbf{C}^n:d(z,K)\leqslant\varepsilon\},$$

则 K_ε 是有界闭集. 从 $d(K,\mathbf{C}^n-G)>\varepsilon$ 知道 $K_\varepsilon\subset G$，任取 $z\in K$，记 $P(z,\varepsilon)$ 为以 z 为中心，ε 为半径的多圆柱，则 $P(z,\varepsilon)\subset K_\varepsilon\subset G$. 于是，由定理 1.2.3 的 Cauchy 不等式，对任意 $f\in H(G)$，有

$$|(D^\alpha f)(z)|\leqslant\frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}\sup_{\zeta\in K_\varepsilon}|f(\zeta)|, \tag{2}$$

这个不等式对任意 $z\in K$ 成立. 现在任取 $a\in\hat{K}$，由 $\hat{K}$ 的定义及 (2) 得

$$|(D^\alpha f)(a)|\leqslant\sup_{z\in K}|(D^\alpha f)(z)|\leqslant\frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}\sup_{\zeta\in K_\varepsilon}|f(\zeta)|. \tag{3}$$

由于 K_ε 是紧的，$\sup\limits_{\zeta\in K_\varepsilon}|f(\zeta)|=M<\infty$，故从 (3) 可得

$$\left|\frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha\right|\leqslant M\left(\frac{|z_1-a_1|}{\varepsilon}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{|z_n-a_n|}{\varepsilon}\right)^{\alpha_n}.$$

这说明对任意 $f\in H(G)$，展开式

$$f(z)=\sum_{\alpha\geqslant 0}\frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha \tag{4}$$

在 $P(a,\varepsilon)$ 中成立，由此便可得 $d(a,\mathbf{C}^n-G)\geqslant\varepsilon$. 事实上，如果 $d(a,\mathbf{C}^n-G)=\delta<\varepsilon$，则必有 $b\in\mathbf{C}^n-G$，使得 $d(a,b)=\delta<\varepsilon$，即 $b\in P(a,\varepsilon)$. 这就是说

$$P(a,\varepsilon)\cap(\mathbf{C}^n-G)\neq\varnothing.$$

既然 (4) 在 $P(a, \varepsilon)$ 中成立，这说明每个 $f\in H(G)$ 能全纯开拓出 G，这和 G 是全纯域相矛盾. 由于 a 是 $\hat{K}$ 中任意点，所以得 $d(\hat{K}, \mathbf{C}^n-G)\geqslant\varepsilon$. 这样我们就在 $d(K, \mathbf{C}^n-G)>\varepsilon$ 的假定下，证明了 $d(\hat{K}, \mathbf{C}^n-G)\geqslant\varepsilon$. 现在就利用这一结论来证明 (1). 因为 $K\subset\hat{K}$，所以 $d(\hat{K}, \mathbf{C}^n-G)\leqslant d(K, \mathbf{C}^n-G)$. 如果等号不成立，不妨设 $d(K, \mathbf{C}^n-G)-d(\hat{K}, \mathbf{C}^n-G)>\eta>0$. 现在取 $\varepsilon'=d(\hat{K}, \mathbf{C}^n-G)+\eta$，则得 $d(K, \mathbf{C}^n-G)>\varepsilon'$，因而 $d(\hat{K}, \mathbf{C}^n-G)\geqslant\varepsilon'=d(\hat{K}, \mathbf{C}^n-G)+\eta$，即 $\eta\leqslant0$. 这和 η 的取法相矛盾，因而 (1) 成立. □

作为定理 5.2.1 的简单推论，我们有

定理 5.2.2 $\mathbf{C}^n$ 中每个全纯域一定是全纯凸域.

证 因为 $K\subset\subset G$ 等价于 $d(K,\mathbf{C}^n-G)>0$. 故由定理 5.2.1，从 $K\subset\subset G$ 立刻可得 $\hat{K}\subset\subset G$，因而 G 是全纯凸的. □

5.2.2 全纯凸域一定是全纯域

定理 5.2.2 的逆也是成立的. 实际上，我们在证明定理 5.1.13 的必要性时，已经证明了全纯凸域一定是全纯域，不过我们现在想证明得更多一些. 下面我们将证明，在全纯凸域 G 上存在这样的函数 $f\in H(G)$，它在 ∂G 每点附近都是无界的. 为此，先证明下面的

引理 5.2.3 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域. 若 $\{K_\nu\}$ 是 G 的一个正规穷竭，那么存在 G 中的点列 $\{p_j\}$ 和严格递增的自然数列 $\{\nu_j\}$，使得

(i) $p_j\in K_{\nu_j+1}-K_{\nu_j}$, $j=1, 2, \cdots$

(ii) 对于每个 $\zeta\in\partial G$ 和 ζ 的邻域 $U(\zeta)$，$U(\zeta)\cap G$ 中必有 $\{p_j\}$ 中无穷多个点.

证 设 a 是 $\mathbf{C}^n$ 中任意有理点，r 是任意正有理数，记

$$A=\{B(a,r): B(a,r)\cap G\neq\varnothing, B(a,r)\cap(\mathbf{C}^n-G)\neq\varnothing\}.$$

显然，A 是可列集，可排列为 B_1，B_2，…命

$$D_j = B_j \cap G, \quad j = 1,2,\cdots$$

任取 $p_1 \in D_1$，因 $D_1 = B_1 \cap G \subset G$，而 $G = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} (K_{\nu+1} - K_\nu)$，$K_0 = \varnothing$，故存在某个 $\nu_1 \in \mathbf{N}$，使得 $p_1 \in K_{\nu_1+1} - K_{\nu_1}$. 今从 p_1 设法选 p_2. 从 D_2 的定义以及 K_{ν_1-1} 是 G 中紧集这一事实，即知 $D_2 - K_{\nu_1-1}$ 不空. 任取 $p_2 \in D_2 - K_{\nu_1+1}$，因为 $p_2 \in D_2 \subset G$，故必存在 $\nu_2 \in \mathbf{N}$，使得 $p_2 \in K_{\nu_2+1} - K_{\nu_2}$. 因为 $p_2 \notin K_{\nu_1-1}$，故必有 $\nu_2 > \nu_1$. 这个过程一直可以进行下去，我们得到 $\{p_j\}$ 满足：

$$p_j \in K_{\nu_j+1} - K_{\nu_j}, p_j \in D_j - K_{\nu_{j-1}+1}, \nu_j > \nu_{j-1}.$$

现在证明 ∂G 的每一点都是 $\{p_l\}$ 的极限点. 为此，任取 $\zeta \in \partial G$，如果 ζ 的邻域 $U(\zeta)$ 中只含 $\{p_l\}$ 中的有限个点，设这有限个点与 ζ 的最短距离为 δ. 今在 $B\left(\zeta, \dfrac{\delta}{2}\right)$ 中取一充分靠近 ζ 的有理点 ζ^*，取一小于 $\dfrac{\delta}{2}$ 的正有理数 r，使得 $B(\zeta^*, r) \subset B\left(\zeta, \dfrac{\delta}{2}\right)$，且 $B(\zeta^*, r) \cap G \neq \varnothing$，$B(\zeta^*, r) \cap (\mathbf{C}^n - G) \neq \varnothing$，因而 $B(\zeta^*, r) \in A$，不妨记 $B(\zeta^*, r) = B_s$. 显然 B_s 中没有 $\{p_l\}$ 中的点. 但由 $\{p_l\}$ 的构造知道，$p_s \in D_s \subset B_s$，这就产生了矛盾，因而 $U(\zeta)$ 中必有 $\{p_l\}$ 中无穷多个点. □

现在容易证明

定理 5.2.4 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯凸域，则必存在 G 上的全纯函数 f，它在 ∂G 每点附近都是无界的，即 ∂G 是 f 的**自然边界**.

证 由引理 5.1.10，存在 G 的一个正规穷竭 $\{K_j\}$，使得 $K_j = \hat{K}_j$，$j=1, 2, \cdots$ 再由引理 5.2.3，存在点列 $\{p_j\}$ 和严格递增的自然数列 $\{\nu_j\}$，使得 $p_j \in K_{\nu_j+1} - K_{\nu_j}$，$\partial G$ 上的每一点都是 $\{p_j\}$ 的极限点. 由于 $\{K_{\nu_j}\}$ 也是 G 的一个满足 $K_{\nu_j} = \hat{K}_{\nu_j}$ 的正规穷竭，故由引理 5.1.12，存在 $f \in H(G)$，使得 $\lim\limits_{j\to\infty} |f(p_j)| = \infty$. 由于 ∂G 上每点都是 $\{p_j\}$ 的极限点，故 f 在 ∂G 每点附近无界. □

由此立刻可得

定理 5.2.5 $\mathbf{C}^n$ 中每个全纯凸域一定是全纯域.

证 由定理 5.2.4 即得. □

综合上面的结果，我们得到

定理 5.2.6 (Cartan-Thullen) 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集，则下列事实等价：

(i) G 是全纯域；

(ii) G 是全纯凸域；

(iii) 存在一个 G 上的全纯函数，它以 ∂G 为自然边界.

§5.3 Levi 拟凸域

5.3.1 欧氏凸域的分析特征

前面我们从平面上欧氏凸域的几何凸包所具有的性质（命题 5.1.6）得到启发，引进了全纯凸域的概念，从而给出了全纯域的一种刻画，即全纯域和全纯凸域是等价的. 这一节我们将从 $\mathbf{R}^N$ 中欧氏凸域的边界所具有的性质出发，引进拟凸域的概念，进而证明它和全纯域也是等价的. 我们先来考察，如何用边界条件来刻画欧氏凸域.

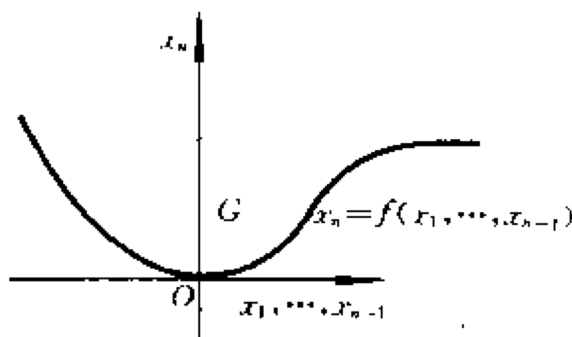


图 2

设 $G\subset\mathbf{R}^N$，对每一个 $x\in\partial G$，可以通过平移、旋转把 x 变成坐标原点，并使 G 的边界 ∂G 在 x 处的切平面正好是 $x_n=0$. 这时在原点附近，G 可表示为

$$G=\{(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbf{R}^N:f(x_1,\cdots,x_{n-1})-x_n<0\}.$$

G 在原点附近是欧氏凸域等价于由 f 的二阶导数构成的方阵半正

定

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}\right)_{1\leqslant j,l\leqslant n-1} \geqslant 0; \tag{1}$$

严格凸等价于上述方阵正定

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}\right)_{1\leqslant j,l\leqslant n-1} > 0. \tag{2}$$

如果记 $r=f(x_1,\cdots,x_{n-1})-x_n$，因为 f 在原点达到极小，所以 $\left.\frac{\partial r}{\partial x_j}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{x=0}=0$，$j=1,\cdots,n-1$，但$\frac{\partial r}{\partial x_n}=-1\neq 0$，即 $r(x_1,\cdots,x_n)=0$ 在原点处的法向量是 $(0,\cdots,0,-1)$，因而切向量是 $(\eta_1,\cdots,\eta_{n-1},0)$. 由于 (1)，(2) 分别为

$$\sum_{j,l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}\eta_j\eta_l=\sum_{j,l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_l}\eta_j\eta_l\geqslant 0(\text{或}>0),$$

又因为 η 的第 n 个坐标为 0，故上式等价于

$$\sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_l}\eta_j\eta_l\geqslant 0(\text{或}>0).$$

因而 (1)，(2) 可理解为 n 阶方阵$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_l}\right)_{1\leqslant j,l\leqslant n}$在原点的切平面半正定或正定. 为了能把上面的结果严格地叙述出来，我们引进下面的定义.

定义 5.3.1 $\mathbf{R}^N$ 中的开集 G 在 $p\in\partial G$ 点称为具有 $C^k(1\leqslant k\leqslant\infty)$ 类**可微边界**，如果存在 p 点的邻域 U 和一个实值函数 $\varphi\in C^k(U)$，使得

(i) $U\cap G=\{x\in U: \varphi(x)<0\}$;

(ii) $d\varphi(x)\neq 0$, $x\in U$.

如果 ∂G 上每一点都具有 C^k 类可微边界，就称 G 具有 **C^k 类可微边界**，简称 **G 具有 C^k 边界**.

任何满足 (i)、(ii) 的函数 $\varphi\in C^k(U)$ 称为 G 在 p 点的**局部定义函数**. 如果 U 是 ∂G 的邻域，那么满足 (i) (ii) 的函数 $\varphi\in C^k(U)$

称为 G 的**整体定义函数**，简称 G 的**定义函数**.

例如 $\varphi(z)=z\bar{z}'-1$ 便是单位球的定义函数.

容易看出，从定义 5.3.1 的 (i) (ii) 即可推出

$$U\cap\partial G=\{x\in U:\varphi(x)=0\},$$

$$U-\overline{G}=\{x\in U:\varphi(x)>0.\}$$

对于有界域，一定有整体定义函数.

命题 5.3.2 设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中具有 C^k 边界的有界域，则必存在 G 的整体定义函数，即存在 ∂G 的邻域 U 和 $\varphi\in C^k(U)$，使得

$$G\cap U=\{x\in U:\varphi(x)<0\}.$$

证 由于 ∂G 是紧的，故存在有限多个开集 U_1，…. U_m 和局部定义函数 $\varphi_j\in C^k(U_j)$，$j=1$，…，m，使得 $\partial G\subset\bigcup_{j=1}^{m}U_j$. 记 $U=\bigcup_{j=1}^{m}U_j$. 由单位分解定理 4.6.3，存在 $f_j\in C_0^\infty(U_j)$，$0\leqslant f_j\leqslant 1$，在 U 上有 $\sum_{j=1}^{m}f_j(x)=1$. 现在定义

$$\varphi=\sum_{j=1}^{m}f_j\varphi_j,$$

那么 $\varphi\in C^k(\mathbf{R}^N)$. 现任取 $x\in\partial G$，则必存在某个 l，使得 $x\in U_l$. 对于其它 U_j，$j\neq l$，有两种情形：如果 $x\notin U_j$，则因 $\mathrm{supp}f_j\subset U_j$，所以 $f_j(x)=0$；如果 $x\in U_j$，则 $\varphi_j(x)=0$，因而总有 $\varphi(x)=0$. 同样道理 $d\varphi(x)\neq 0$. 适当收缩 U，即可断言对所有 $x\in U$，$d\varphi(x)\neq 0$. 最后来证明

$$U\cap G=\{x\in U:\varphi(x)<0\}.$$

事实上，如果 $x\in U\cap G$，则必存在某个 l，使得 $x\in U_l\cap G$，和上面一样讨论，即可得 $\varphi(x)\leqslant f_l(x)\varphi_l(x)<0$. 反之，如果对某点 $x\in U$，有 $\varphi(x)<0$，则从 φ 的定义知道，必有某个 j，使得 $\varphi_j(x)<0$，因而 $x\in U_j\cap G\subset U\cap G$. □

现在给出 ∂G 某点处切空间的定义.

设 $G\subset\mathbf{R}^N$ 具有 C^1 边界，φ 是 G 的定义函数，$p\in\partial G$，我们称

$$T_p(\partial G)=\left\{\xi\in\mathbf{R}^N:\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(p)\xi_j=0\right\}$$

为 ∂G 在 p 点处的**切空间**.

现在可以把刚才讨论的结果表述为：

设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中具有 C^2 边界的有界域，φ 是它的定义函数，那么 G 是欧氏凸域的充分必要条件是

$$\sum_{j,k=1}^{N}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}(p)\xi_j\xi_k\geqslant 0 \tag{3}$$

对所有 $p\in\partial G$ 和 $\xi\in T_p(\partial G)$ 成立.

如果下式成立

$$\sum_{j,k=1}^{N}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}(p)\xi_j\xi_k>0,\xi\in T_p(\partial G),\xi\neq 0,$$

就说 $G\subset\mathbf{R}^N$ 在 $p\in\partial G$ 是强欧氏凸的. 如果 G 在 ∂G 的每点都是强欧氏凸的，就说 G 是强欧氏凸域.

5.3.2 Levi 拟凸域和强拟凸域

1910 年，E. E. Levi 发现具有 C^2 边界的全纯域，它的定义函数也满足一个类似于 (3) 的条件 (在复的形式下). 由于欧氏凸域在双全纯映射下不再是欧氏凸域 (这一点从单复变的 Riemann 共形映射存在定理即可看出)，而全纯域在双全纯映射下还是全纯域. 为了要得到 Levi 的条件，我们应该研究一下 (3) 的哪部分在双全纯映射下不变.

条件 (3) 是说由定义函数 φ 的二阶偏导数构成的二次型在切空间 $T_p(\partial G)$ 上是半正定的. 在复的形式下，切空间 $T_p(\partial G)$ 应该由复切空间来代替. 我们知道，$\mathbf{C}^n$ 中的点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 也可看成 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的点

$$z=(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n),$$

这里$z_j=x_j+iy_j$. 因此iz作为$\mathbf{R}^{2n}$中的点，它的坐标是

$$iz=(-y_1,x_1,\cdots,-y_n,x_n).$$

设$w=(w_1,\cdots,w_n)$是$\mathbf{C}^n$中另一个点，$w_j=u_j+iv_j$. 作为$\mathbf{C}^n$中的向量，z，w正交是指

$$\langle z,w\rangle=\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{w}_j=0.$$

作为$\mathbf{R}^{2n}$中的向量，z，w正交是指

$$z\cdot w=\sum_{j=1}^{n}(x_ju_j+y_jv_j)=0.$$

容易看出$\langle z,w\rangle$和$z\cdot w$有下面的关系：

$$z\cdot w=\operatorname{Re}\langle z,w\rangle,\quad -iz\cdot w=\operatorname{Im}\langle z,w\rangle. \tag{4}$$

设w是$\mathbf{C}^n$中一个给定的向量，从(4)可以看出，z和w复正交，即$\langle z,w\rangle=0$的充分必要条件是

$$z\cdot w=0,\ -iz\cdot w=0.$$

如果记$-iz=z'$，则z'和w实正交，而$z=iz'$. 因此，z和w复正交的充分必要条件是z和w实正交，而且$z=iz'$，z'是一个与w实正交的向量. 由此，我们给出复切空间的定义如下.

定义 5.3.3 设$G\subset\mathbf{C}^n$具有C^1边界，称

$$T_p^{\mathbf{C}}(\partial G)=T_p(\partial G)\cap iT_p(\partial G)$$

为∂G在p点的**复切空间**.

命题 5.3.4 设φ是$G\subset\mathbf{C}^n$在$p\in\partial G$处的局部定义函数，那么

$$T_p^{\mathbf{C}}(\partial G)=\left\{w\in\mathbf{C}^n:\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(p)w_j=0\right\}.$$

证 因为$\dfrac{\partial}{\partial z_j}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}-i\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$，$w_j=u_j+iv_j$，所以$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(p)w_j=0$的充分必要条件是

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(p)u_j+\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(p)v_j\right)=0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(p)v_j-\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(p)u_j\right)=0.$$

前者说明 $w\in T_p(\partial G)$，后者说明 $-iw\in T_p(\partial G)$，即 $w\in iT_p(\partial G)$.

□

现在把（3）中的二次型用复的形式来表示.

记 $w_j=\xi_j+i\eta_j$，把 $w=(\xi_1,\eta_1,\cdots,\xi_n,\eta_n)$ 看成 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的点.注意到

$$\frac{\partial}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial z_j}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j},\quad \frac{\partial}{\partial y_j}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}-\frac{\partial}{\partial z_j}\right),$$

$$\xi_j=\frac{1}{2}(w_j+\overline{w}_j),\quad \eta_j=\frac{1}{2i}(w_j-\overline{w}_j),$$

那么（3）中的二次型可以写为

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}(p)\xi_j\xi_k+2\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial y_k}(p)\xi_j\eta_k+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_j\partial y_k}(p)\eta_j\eta_k$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_k}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\varphi(p)(w_j+\overline{w}_j)(w_k+\overline{w}_k)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}-\frac{\partial}{\partial z_k}\right)\varphi(p)(w_j+\overline{w}_j)$$

$$\cdot\frac{1}{i}(w_k-\overline{w}_k)+\frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}-\frac{\partial}{\partial z_j}\right)\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}-\frac{\partial}{\partial z_k}\right)\varphi(p)$$

$$\cdot\frac{1}{i}(w_j-\overline{w}_j)\frac{1}{i}(w_k-\overline{w}_k)$$

$$=2\mathrm{Re}\left\{\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(p)w_jw_k\right\}+2\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}(p)w_j\overline{w}_k.$$

如果记

$$Q_p(\varphi,w)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(p)w_jw_k,$$

$$L_p(\varphi,w)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(p)w_j\overline{w}_k, \tag{5}$$

那么（3）中的二次型即为

$$2\mathrm{Re}Q_p(\varphi,w)+2L_p(\varphi,w).$$

因此，G 是欧氏凸域的条件可用复的形式表示为

$$\mathrm{Re}Q_p(\varphi,w)+L_p(\varphi,w)\geqslant 0, w\in T_p(\partial G). \tag{6}$$

注意到

$$Q_p(\varphi,-iw)=-Q_p(\varphi,w), L_p(\varphi,-iw)=L_p(\varphi,w).$$

在（6）中用 $-iw$ 代 w，即得

$$-\mathrm{Re}Q_p(\varphi,w)+L_p(\varphi,w)\geqslant 0, -iw\in T_p(\partial G). \tag{7}$$

（6），（7）两式相加即得

$$L_p(\varphi,w)\geqslant 0, w\in T_p^{\mathbf{C}}(\partial G). \tag{8}$$

这就是 Levi 得到的条件. 稍后我们将证明这个条件在双全纯映射下是不变的. 现在就用条件(8)来定义一类新的域. 通常称(8)为 **Levi 条件**.

定义 5.3.5 如果 Levi 条件（8）对 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的域 G 的某个在 p 点附近的局部定义函数 φ 成立，称 G 在 $p\in\partial G$ 是 **Levi 拟凸的**. 如果 Levi 条件（8）对所有 $p\in\partial G$ 成立，称 G 是 **Levi 拟凸域**.

定义 5.3.6 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的域，如果 $L_p(\varphi,w)>0$ 对所有 $w\in T_p^{\mathbf{C}}(\partial G)$, $w\neq 0$ 成立，称 G 在 $p\in\partial G$ 是**强 Levi 拟凸的**. 如果 G 在每点 $p\in\partial G$ 都是强 Levi 拟凸的，称 G 是**强 Levi 拟凸域**.

由（5）式定义的 $L_p(\varphi, w)$ 称为 **Levi 形式**或定义函数 φ 在 p 点的**复 Hessian**.

从上面的讨论，我们已经得到

定理 5.3.7 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的欧氏凸域是 Levi 拟凸域.

定理 5.3.7 的逆是不成立的.

下面看几个例子.

例 5.3.8 单位球 B_n 是强 Levi 拟凸域.

证 因为它的定义函数 $\varphi(z)=z\bar{z}'-1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}=\bar{z}_j$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}=\delta_{jk}$, 所以

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}w_j\overline{w}_k=\sum_{j,k=1}^{n}\delta_{jk}w_j\overline{w}_k=\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2>0, w\neq 0.$$

因而 B_n 是强 Levi 拟凸域. □

例 5.3.9 域 $G=\{z\in\mathbf{C}^n: |z_1|^{p_1}+\cdots+|z_n|^{p_n}<1, p_j\geqslant 2, j=1, \cdots, n\}$ 是 Levi 拟凸域. 只有当 $p_1=\cdots=p_n=2$ 时, 它是强 Levi 拟凸域.

证 G 的定义函数是

$$\varphi(z)=(z_1\bar{z}_1)^{\frac{p_1}{2}}+\cdots+(z_n\bar{z}_n)^{\frac{p_n}{2}}-1.$$

直接计算可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}=\frac{p_j}{2}(z_j\bar{z}_j)^{\frac{p_j}{2}-1}\bar{z}_j,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}=\frac{p_j^2}{4}|z_j|^{p_j-2}\delta_{jk}.$$

因而

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(\zeta)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}w_j\overline{w}_k=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}p_j^2|\zeta_j|^{p_j-2}|w_j|^2\geqslant 0. \tag{9}$$

因而 G 是 Levi 拟凸域. 如果有某个 $p_l>2$, 这时取 $\zeta\in\partial G$, 要求它的第 l 个坐标 $\zeta_l=0$, 取 $w=(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, 它的第 l 个坐标为 1, 其它坐标为 0, 则 $w\in T_\zeta^{\mathbf{C}}(\partial G)$, 且 (9) 的左端为 0. 因此 G 在这种点上不是强 Levi 拟凸域. 但当 $p_j=2, j=1, \cdots, n$ 时, 这种情况不会发生, 这时 G 就是单位球. □

例 5.3.10 当 $p_j\geqslant 1$ $(j=1, \cdots, n)$ 时, 例 5.3.9 中的域 G 是欧氏凸域.

证 我们用欧氏凸域的几何定义来证. 我们证明, 如果 $a\in G$, $b\in G$, 那么 $\frac{a+b}{2}$ 也属于 G. 事实上, 记

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{p_j} - 1,$$

则 $\varphi(a)<0$，$\varphi(b)<0$. 利用不等式

$$(t_1+t_2)^p \leqslant 2^{p-1}(t_1^p+t_2^p), \quad t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, p \geqslant 1.$$

即得

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{a_j+b_j}{2}\right|^{p_j} - 1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{p_j}}(|a_j|+|b_j|)^{p_j} - 1$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|a_j|^p + |b_j|^p) - 1 < 0.$$

因而 G 是欧氏凸域. □

这个例子说明欧氏凸域不一定是强 Levi 拟凸域.

5.3.3 Levi 拟凸性和域的定义函数无关

在上面的 Levi 拟凸域和强 Levi 拟凸域的定义中，存在一个明显的问题，那就是定义函数的不唯一性. 如果在 φ 作为定义函数时，G 是 Levi 拟凸域，换了另一个定义函数，它是否还是 Levi 拟凸域？下面我们将证明，域的 Levi 拟凸性或强 Levi 拟凸性与定义函数的选取无关. 为此先证明

命题 5.3.11 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$p\in\partial G$，U 是 p 的邻域. 如果 φ 和 ψ 是 G 的两个在 U 上的 C^k 类局部定义函数，那么存在 p 的邻域 $V\subset U$ 和唯一的正函数 $h\in C^{k-1}(V)$，使得

$$\varphi = h\psi$$

在 V 上成立.

证 因为 $p\in U\cap\partial G$，所以 $\varphi(p)=0$. 由于 $d\varphi(p)\neq 0$，不妨设 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(p)\neq 0$. 根据隐函数存在定理，存在 p 的邻域 V，使得在 V 上可以从 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)=0$ 中解出

$$x_1 = \sigma(x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n).$$

不妨设 $\varphi<0$ 对应于 $x_1<\sigma(x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$. 作变换

$$\Phi: (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \to (u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n)$$

如下：

$$u_1=x_1-\sigma(x_2,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n),$$

$$u_j=x_j-p_j,\quad j=2,\cdots,n.$$

$$v_j=y_j-p_{n+j},\quad j=1,\cdots,n.$$

这里 $(p_1,\cdots,p_{2n})$ 是 p 在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的坐标. 记 $\Phi(V)=Q$，命

$$\tilde{\varphi}=\varphi\circ\Phi^{-1},\quad \tilde{\psi}=\psi\circ\Phi^{-1},$$

则 $\tilde{\varphi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 是 Q 上的 C^k 类函数. 由于 $\Phi(p)=0$，故 Q 是原点的邻域. 不妨假定 Q 是欧氏凸的，不然的话，作一个以原点为中心包含在 Q 中的小球即行. 命

$$h_1(u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n)=\int_0^1\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial u_1}(tu_1,u_2,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n)dt,$$

$$h_2(u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n)=\int_0^1\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial u_1}(tu_1,u_2,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n)dt.$$

因为 Q 是欧氏凸域，上述积分有意义，且 h_1，$h_2\in C^{k-1}(Q)$. 因为 $\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial u_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\neq 0$，$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial u_1}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\neq 0$（因为 $d\psi\neq 0$，故可假设 $\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\neq 0$），所以 $h_1\neq 0$，$h_2\neq 0$. 由于 $\tilde{\varphi}(0,u_2,\cdots,v_n)=\varphi\circ\Phi^{-1}(0,u_2,\cdots,v_n)=0$，因而

$$h_1(u_1,\cdots,v_n)=\frac{1}{u_1}(\tilde{\varphi}(u_1,\cdots,v_n)-\tilde{\varphi}(0,u_2,\cdots,v_n))$$

$$=\frac{1}{u_1}\tilde{\varphi}(u_1,\cdots,v_n).$$

故得 $h_1u_1=\tilde{\varphi}$，同理 $h_2u_1=\tilde{\psi}$ 在 Q 上成立. 命 $\tilde{h}=\frac{h_1}{h_2}$，则 $\tilde{h}\in C^{k-1}(Q)$. 命 $h=\tilde{h}\circ\Phi$，则 $h\in C^{k-1}(V)$. 且当 $z\in V$ 时，有

$$h(z)\psi(z)=\tilde{h}(\Phi(z))\tilde{\psi}(\Phi(z))=\frac{h_1(\Phi(z))}{h_2(\Phi(z))}\tilde{\psi}(\Phi(z))$$

$$=h_1(\Phi(z))u_1=\tilde{\varphi}(\Phi(z))=\varphi(z).$$

h 的唯一性由上面的等式即明．由于 φ 和 ψ 在 $G\cap U$ 中都取负值，在 $(\mathbf{C}^n-G)\cap U$ 中都取正值，所以 h 在 $G\cap U$ 和 $(\mathbf{C}^n-G)\cap U$ 中取正值．至于在 ∂G 上，由于 $d\varphi=hd\psi+\psi dh=hd\psi$，且因 $d\varphi\neq 0$，$d\psi\neq 0$，所以 $h\neq 0$．而已知 h 在 G 内取正值，故在 ∂G 上也取正值．□

有了这个命题就可证明下面的

命题 5.3.12 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$p\in\partial G$，U 是 p 的邻域．如果 φ 和 ψ 是 G 的两个在 U 上的 C^2 定义函数，那么

(i) 由 φ 和 ψ 产生的 p 点处的复切空间是相同的；

(ii) 如果 φ 满足 Levi 条件 (8)，那么 ψ 也满足．

证 (i) 由命题 5.3.11，存在 p 的邻域 $V\subset U$ 及正函数 $h\in C^1(V)$，使得 $\varphi=h\psi$ 在 V 上成立．于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}=\frac{\partial h}{\partial z_j}\psi+h\frac{\partial\psi}{\partial z_j}. \tag{10}$$

由于 $\psi(p)=0$，所以

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(p)w_j=h(p)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}(p)w_j.$$

由命题 5.3.4，即知二者产生的复切空间 $T_p^{\mathbf{C}}(\partial G)$ 是相同的．

(ii) 在证明第二个结论时，我们需要如下的一个简单事实．设 f，g 是定义在 $a\in\mathbf{R}^N$ 附近的两个函数，$g(a)=0$，$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ 存在，f 在 a 处连续，那么 fg 在 a 处对 x_j 的偏导数存在，而且

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a)=f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a).$$

现在让 (10) 的两端对 $\bar{z}_k$ 求偏导数，并在 p 点取值．由于 $\frac{\partial h}{\partial z_j}$ 在 p 处连续，$\psi(p)=0$，因而应用上面的简单事实可得

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\left(\frac{\partial h}{\partial z_j}\psi\right)(p)=\frac{\partial h}{\partial z_j}(p)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_k}(p).$$

(10) 右端第二项求导的结果是

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\left(h\frac{\partial \psi}{\partial z_j}\right)(p)=\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_k}(p)\frac{\partial \psi}{\partial z_j}(p)+h(p)\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p).$$

于是由（10）即得

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p)w_j\bar{w}_k=2\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_k}(p)\bar{w}_k\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \psi}{\partial z_j}(p)w_j\right\}$$

$$+h(p)\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p)w_j\bar{w}_k.$$

因而当 $w\in T_p^{\mathbf{C}}(\partial G)$ 时，就有

$$L_p(\varphi,w)=h(p)L_p(\psi,w).$$

因为 $h(p)>0$，故 $L_p(\varphi,w)$ 和 $L_p(\psi,w)$ 同时取正值．□

这个命题说明域的 Levi 拟凸性或强拟凸性与定义函数的选取无关．但从证明中可以看出，如果 w 不是取自复切空间 $T_p^{\mathbf{C}}(\partial G)$，Levi 形式的符号有可能随定义函数而异．但在强 Levi 拟凸的情形，我们总可以选取一个适当的定义函数，使其 Levi 形式对任意 $w\neq 0$ 都取正值．

定理 5.3.13 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的有界强 Levi 拟凸域，则必存在 G 的定义函数 ρ 和正数 λ_0，使得对任意非零的 $w\in\mathbf{C}^n$ 和 $p\in\partial G$，有

$$L_p(\rho,w)\geqslant\lambda_0|w|^2.\tag{11}$$

证 根据命题 5.3.2，设 φ 是 G 的一个整体定义函数，则对任意 $\alpha>0$，$\rho=\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha\varphi}-1)$ 也是 G 的一个定义函数．由直接计算可得

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}=\alpha e^{\alpha\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k}+e^{\alpha\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}.$$

固定 $p\in\partial G$，则 $\varphi(p)=0$，由上式可得

$$L_p(\rho,w)=L_p(\varphi,w)+\alpha\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(p)w_j\right|^2.\tag{12}$$

用 S 记 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球面，命

$$A = \{w \in S : L_p(\varphi, w) \leqslant 0\}.$$

由于 G 是强 Levi 拟凸域，且 A 是紧的，所以

$$\min_{w\in A}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(p)w_j\right| > 0.$$

于是必可取到正数 α，使得

$$\alpha > -\min_{w\in A} L_p(\varphi, w)\left(\min_{w\in A}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(p)w_j\right|\right)^{-1}.$$

由（12）知道，这样选取的 α 所产生的 ρ 必有

$$L_p(\rho, w) > 0 \tag{13}$$

对任意 $w\in S$ 成立. 由 $L_p(\rho, w)$ 的连续性，(13) 对 p 附近的点也成立. 综上所述，对每个 $p\in\partial G$，存在 p 的邻域 $U(p)$ 及相应的 $\alpha>0$，使得 (13) 对 $U(p)$ 中的点都成立. 由于 ∂G 是紧的，故可取到有限个 $U(p)$ 覆盖 ∂G，每个 $U(p)$ 对应一个 α，设 α_0 是这有限个 α 中之最大者. 取 $\rho=\frac{1}{\alpha_0}(e^{\alpha_0\varphi}-1)$，则 (13) 对所有 $p\in\partial G$ 成立. 由于 $\partial G\times S$ 是紧的，$L_p(\rho, w)$ 在 $\partial G\times S$ 上有最小值 $\lambda_0>0$，因而对任意非零的 $w\in\mathbf{C}^n$ 及 $p\in\partial G$，(11) 成立. □

最后，我们来证明 Levi 拟凸性在双全纯映射下的不变性.

命题5.3.14 设 $\mathbf{C}^n$ 中的域 G 在 $p\in\partial G$ 附近具有 C^2 边界，U 是 p 的一个邻域. 如果 $\zeta=F(z)$ 是 U 上一个双全纯映射，记 $D=F(U\cap G)$，那么 D 在 $q=F(p)$ 处是 Levi 拟凸的充分必要条件是 G 在 p 处是 Levi 拟凸的.

证 设 φ 是 G 在 p 附近的定义函数，那么 $\psi=\varphi\circ F^{-1}$ 是 D 在 q 附近的定义函数. 用 $F'(p)$ 记双全纯映射 F 在 p 点处的导数，若记 $\xi=F'(p)w$，那么从 $\varphi(z)=\psi(F(z))$ 通过直接计算可得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(p)w_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}(q)\xi_j, \tag{14}$$

$$L_p(\varphi, w) = L_q(\psi, \xi). \tag{15}$$

若 G 在 p 处是 Levi 拟凸的，取 $\xi\in T_q^{\mathbf{C}}(\partial D)$，记 $w=(F'(p))^{-1}\xi$，

则从（14）知道 $w\in T_p^{\mathbf{C}}(\partial G)$，因而 $L_p(\varphi, w)\geqslant 0$，从（15）即得 $L_q(\psi,\xi)\geqslant 0$，因而 D 在 q 处是 Levi 拟凸的. 反之亦然. □

§5.4 多重次调和函数

5.4.1 多重次调和函数的基本性质

在下面的讨论中，多重次调和函数的概念起着重要的作用.

定义5.4.1 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，u 是 G 上的实值函数 $u: G\to \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ $(u\not\equiv -\infty)$. 如果 u 满足

(i) u 是上半连续的；

(ii) 限制在每条复直线上的 u 都是次调和的，即对每个 $z_0\in G$ 与 $a\in\mathbf{C}^n$，u 是 $\{z_0+\lambda a: \lambda\in\mathbf{C}\}\cap G$ 上的单复变数 λ 的次调和函数；

就称 u 是 G 上的**多重次调和函数**. 用 $PS(G)$ 记 G 上多重次调和函数的全体.

称 $\{z_0+\lambda a: \lambda\in\mathbf{C}\}$ 是通过 z_0 的以 a 为方向的**复直线**.

如果 $f\in H(G)$，那么 $f(z_0+\lambda a)$ 是 λ 的全纯函数. 由命题1.5.7知道 $\log|f|$ 和 $|f|^p$ $(0<p<\infty)$ 都是 G 上的多重次调和函数.

命题5.4.2 域 G 上的多重次调和函数一定是次调和函数.

证 设 u 是 G 上的多重次调和函数. 任取 $z_0+rB\subset G$，因为 $u(z_0+\lambda\zeta)$ 是 λ 的次调和函数，这里 $\zeta\in\partial B$，所以 $u(z_0)\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+re^{i\theta}\zeta)\,d\theta$，两边对 ζ 在 ∂B 上积分，利用定理1.4.4 (i) 得

$$u(z_0)\leqslant\int_{\partial B}d\sigma(\zeta)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+re^{i\theta}\zeta)d\theta=\int_{\partial B}u(z_0+r\zeta)d\sigma(\zeta).$$

由定义1.5.9知道 u 是 G 上的次调和函数. □

命题5.4.3 如果 u 是域 $G\subset\mathbf{C}^n$ 上的二次连续可微函数，那么 u 在 G 上是多重次调和函数的充分必要条件是 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_l}\right)_{1\leqslant j,l\leqslant n}\geqslant 0$ 在 G 上成立.

证 对于任何复直线 $z_0+\lambda a\subset G$，$a\in\mathbf{C}^n$，由定理1.5.8知道，函数 $\lambda\to u(z_0+\lambda a)$ 是次调和函数的充分必要条件是 $\frac{\partial^2 u(z_0+\lambda a)}{\partial\lambda\partial\bar{\lambda}}\geqslant 0$，即 $\sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_l}a_j\bar{a}_l\geqslant 0$，它等价于 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_l}\right)_{1\leqslant j,l\leqslant n}\geqslant 0$. □

上面的条件也可以等价地说成 u 的 Levi 形式

$$L_p(u,w)\geqslant 0$$

对所有的 $p\in G$ 及 $w\in\mathbf{C}^n$ 成立.

定义5.4.4 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域. 如果实值函数 $u\in C^2(G)$ 对 $p\in G$ 及所有 $w\in\mathbf{C}^n$ $(w\neq 0)$ 满足 $L_p(u,w)>0$，就称 u 在 p 点是**强多重次调和的**. 如果 u 在 G 中所有点都是强多重次调和的，就称 u 在 G 上是**强多重次调和函数**.

例如 $u(z)=|z|^2$ 就是 $\mathbf{C}^n$ 中的强多重次调和函数. 因为 $u(z)=\sum_{j=1}^{n}z_j\bar{z}_j$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}=\delta_{jk}$，所以 $L_p(u,w)=|w|^2>0$，$w\neq 0$ 对所有 p，$w\in\mathbf{C}^n$ 成立.

利用强多重次调和函数的概念，定理5.3.13可叙述为

定理5.4.5 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的有界强 Levi 拟凸域，则在 ∂G 的邻域 U 上存在 G 的定义函数 ρ，使得 ρ 在 U 中是强多重次调和函数.

利用命题5.4.3，可以证明多重次调和函数在全纯映射下是不变的.

命题5.4.6 设 G，D 分别是 $\mathbf{C}^n$ 和 $\mathbf{C}^m$ 中的域，$F: D\to G$ 是全纯映射. 如果 $u\in PS(G)\cap C^2(G)$，那么 $u\circ F\in PS(D)$.

证 通过直接计算知道，对任意 $a\in D$ 有

$$L_a(u\circ F,w)=L_{F(a)}(u,F'(a)w).$$

因为 $u\in PS(G)$，故右端非负，因而左端也非负，所以 $u\circ F\in PS(D)$．□

这个命题的缺陷是要假定 $u\in C^2(G)$．实际上，没有这个条件结论也成立，但需要用到关于多重次调和函数的逼近定理．为此先证一个引理．

引理5.4.7 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域．如果 $u\in PS(G)$，那么 $u\in L^1(G,\ \mathrm{loc})$①．特别 $\{z\in G:u(z)=-\infty\}$ 的 Lebesgue 测度为0．

证 因为 $u\not\equiv-\infty$，所以存在 $a\in G$，$u(a)>-\infty$．取 $B(a,r)\subset G$，我们证明 $\int_{B(a,r)}ud\nu$ 存在．因为 u 在 $B(a,r)$ 中有上界，所以只须证明 $\int_{B(a,r)}ud\nu>-\infty$．由命题5.4.2知道，$u$ 是次调和函数，再根据命题1.5.10，即得

$$-\infty<u(a)<\int_{B(a,r)}ud\nu.$$

现设

$$E=\{a\in G:u\ 在\ a\ 的某个邻域中可积\}.$$

显然 E 是开集．由刚才的证明知道 E 不空．今若 $a\in G-E$，则由上所证，必有 a 的某个邻域，对这邻域中所有的 z，$u(z)=-\infty$．因而 $G-E$ 也是开集．由于 G 是连通的，所以 $G=E$．□

5.4.2 用 $\mathbf{C}^\infty$ 的强多重次调和函数逼近多重次调和函数．

现在可以证明下面的多重次调和函数逼近定理．

定理5.4.8 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$u\in PS(G)$，记

$$G_j=\left\{z\in G:|z|<j,d(z)>\frac{1}{j}\right\},j=1,2,\cdots$$

这里 $d(z)=d(z,\partial G)$ 是 z 到 ∂G 的欧氏距离，则必存在 $\{u_j\}\subset C^\infty(G)$，使得

---

① $L^1(G,\ \mathrm{loc})$ 是指在 G 的任意紧集上可积函数的全体．

(i) u_j 在 G_j 上是强多重次调和函数；

(ii) $u_j(z) \geqslant u_{j+1}(z)$，$z \in G_j$；

(iii) $\lim\limits_{j\to\infty} u_j(z) = u(z)$，$z \in G$；

(iv) 如果 u 是连续函数，那么 (iii) 的收敛是内闭一致的.

证 命

$$\psi(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|z|^2-1}}, & |z| < 1, \\ 0, & |z| \geqslant 1, \end{cases}$$

记 $s = \int\limits_{\mathbf{C}^n} \psi(z) dm(z)$，$\chi(z) = \frac{1}{s}\psi(z)$，则 χ 有下列性质：(a) $\chi \geqslant 0$；

(b) $\operatorname{supp}\chi = \{z: |z| \leqslant 1\}$； (c) $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{C}^n)$；(d) $\int\limits_{\mathbf{C}^n} \chi dm = 1$；

(e) χ 是径向函数，即若 $|z| = |w|$，则 $\chi(z) = \chi(w)$. 因为 $G_j \subset\subset G$，由引理5.4.7，$u \in L^1(G_j)$，$j = 1, 2, \cdots$ 命

$$v_j(z) = \int\limits_{G_j} u(\zeta)\chi(j(z-\zeta)) j^{2n} dm(\zeta).$$

因为 χ 在整个 $\mathbf{C}^n$ 上有定义，所以 v_j 也在 $\mathbf{C}^n$ 中有定义，且 $v_j \in C^\infty(\mathbf{C}^n)$. 因为当 $z \in G_j$，$|\xi| < 1$ 时，$z - \frac{1}{j}\xi \in G$，所以在对上面的积分作线性变换 $\xi = j(z-\zeta)$ 后，v_j 可表示为

$$v_j(z) = \int\limits_{|\xi|<1} u(z - \frac{\xi}{j})\chi(\xi) dm(\xi), z \in G_j. \tag{1}$$

我们要证明 $v_j \in PS(G_j)$，即要证明对任意 $a \in G_j$，$w \in \mathbf{C}^n$，$v_j(a + \lambda w)$ 是 λ 的次调和函数. 因为 $u(a+\lambda w)$ 是 λ 的次调和函数，所以

$$u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}w) d\theta.$$

于是

$$v_j(a) = \int\limits_{|\xi|<1} u\left(a - \frac{\xi}{j}\right)\chi(\xi) dm(\xi)$$

$$\leqslant \int_{|\xi|<1} \chi(\xi)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(a - \frac{\xi}{j} + re^{i\theta}w\right)d\theta\right\}dm(\xi)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{|\xi|<1} u\left(a - \frac{\xi}{j} + re^{i\theta}w\right)\chi(\xi)dm(\xi)\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_j(a + re^{i\theta}w)d\theta.$$

这就证明了 $v_j \in PS(G_j)$．把等式（1）改写成

$$v_j(z) = \int_{|\xi|<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z - \frac{e^{i\theta}}{j}\xi\right)\chi(e^{i\theta}\xi)d\theta\right\}dm(\xi)$$

$$= \int_{|\xi|<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z - \frac{e^{i\theta}}{j}\xi\right)d\theta\right\}\chi(\xi)dm(\xi), \tag{2}$$

这里我们已经利用了 χ 是径向函数的性质. 由于 $u(z-\lambda\xi)$ 是 λ 的次调和函数，由定理1.5.6，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z - re^{i\theta}\xi)d\theta$$

是 r 的递增函数，因而由（2）即得 $v_j(z) \geqslant v_{j+1}(z)$．从（2）还能得到

$$v_j(z) \geqslant u(z)\int_{|\xi|<1}\chi(\xi)dm(\xi) = u(z). \tag{3}$$

由 u 的上半连续性，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|\eta-z|<\delta$ 时，$u(\eta)<u(z)+\varepsilon$. 现取 $j>\frac{1}{\delta}$，当 $|\xi|<1$时，$\left|z-\frac{\xi}{j}-z\right|<\delta$，因而 $u\left(z-\frac{\xi}{j}\right)<u(z)+\varepsilon$. 于是，从（1）和（3）即得

$$u(z) \leqslant v_j(z) < u(z) + \varepsilon. \tag{4}$$

为了得到需要的 $u_j(z)$，现在只须命

$$u_j(z) = v_j(z) + \frac{1}{j}|z|^2. \tag{5}$$

那么对任意 $a \in G_j$，

$$L_a(u_j, w) = L_a(v_j, w) + \frac{1}{j}|w|^2 \geqslant \frac{1}{j}|w|^2,$$

所以 $u_j \in C^{\infty}(G)$，而且是强多重次调和函数，这就是（i）．此外

$$u_j(z) = v_j(z) + \frac{1}{j}|z|^2 \geqslant v_{j+1}(z) + \frac{1}{j+1}|z|^2 = u_{j+1}(z),$$

这就是（ii）．从（4）和（5）即得

$$\lim_{j\to\infty} u_j(z) = \lim_{j\to\infty} v_j(z) = u(z),$$

这就是（iii）．当 u 是连续函数时，由于 u_j 单调下降，故由 Dini 定理，（iii）的收敛是内闭一致的，这就是（iv）．□

这个定理说明，域 G 上任意一个多重次调和函数，可以用一列 C^{∞} 的强多重次调和函数来逼近，这是一个很有用的定理．我们先用它来去掉命题5.4.6中 $u \in C^2(G)$ 的限制，为此还需要一个引理．

引理5.4.9 设 G 是 $\mathbf{C}$ 中的域，u_j $(j=1, 2, \cdots)$ 是 G 上一列次调和函数．如果 u_j 单调下降趋于 u，那么 u 也是 G 上的次调和函数．

证 如果我们能证明，对任意紧域 $K \subset\subset G$ 及任意在 K 上连续，K 内调和的实值函数 h．如果 $u(z) \leqslant h(z)$ 在 ∂K 上成立，那么在 K 内也有 $u(z) \leqslant h(z)$．那么由定理1.5.5即知 u 是 G 上的次调和函数．对任意给定的 $\varepsilon > 0$，命

$$E_j = \{z \in \partial K: u_j(z) \geqslant h(z) + \varepsilon\},$$

则 E_j 是 ∂K 上的闭子集．因为 u_j 单调下降，所以 $E_{j+1} \subset E_j$，而且 $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \varnothing$．不然的话，如果有 $a \in \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$，则对所有的 j 有 $u_j(a) \geqslant h(a) + \varepsilon$，让 $j \to \infty$ 得 $u(a) \geqslant h(a) + \varepsilon$，这和假定 $u(z) \leqslant h(z)$，$(z \in \partial K)$ 不符．据此，我们断言，必定存在某个自然数 l，使得 E_l 是空集．否则所有的 E_1，E_2，$\cdots$ 都不是空集，取 $p_j \in E_j$ $(j=1, 2, \cdots)$，因 $E_{j+1} \subset E_j$，所以 $\{p_m, p_{m+1}, \cdots\} \subset E_m \subset \partial K$．由于 ∂K 是紧的，故 $\{p_j\}$ 有收敛的子列，不妨设 $\lim_{j\to\infty} p_j = p$．因为每个 E_m 都

是闭集，而且当 $k\geqslant m$ 时，$p_k\in E_m$，所以 $p\in E_m$ 对 $m=1, 2, \cdots$ 都成立，即 $p\in\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j$，这和前而已证的 $\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j$ 是空集相矛盾. 由于 E_l 是空集，故当 $z\in\partial K$ 时，$u_l(z)<h(z)+\varepsilon$. 由于 u_l 是次调和函数，故在 K 上也有 $u_l(z)<h(z)+\varepsilon$，让 $l\to\infty$，即得 $u(z)\leqslant h(z)+\varepsilon$，再让 $\varepsilon\to 0$，即得 $u(z)\leqslant h(z)$ 在 K 上成立. □

现在可以证明

定理5.4.10 设 G，D 分别是 $\mathbf{C}^n$ 和 $\mathbf{C}^m$ 中的域，F：$D\to G$ 是全纯映射. 如果 $u\in PS(G)$，那么 $u\circ F\in PS(D)$.

证 取 $Q\subset\subset D$，记 $F(Q)=K$，则 $K\subset\subset G$. 取充分大的 j，使得 $K\subset G_j$. 根据定理5.4.8，存在 $u_j\in PS(G_j)\cap C^\infty(G)$，使得 u_j 单调下降趋于 u. 由命题5.4.6，$u_j\circ F\in PS(Q)$，而 $u_j\circ F$ 单调下降趋于 $u\circ F$. 故由引理 5.4.9，$u\circ F\in PS(Q)$，即 $u\circ F\in PS(D)$. □

§5.5 拟 凸 域

5.5.1 拟凸域的定义

在§5.3讨论域的 Levi 拟凸性时，是以域具有 C^2边界为前提的. 这一节我们要对不具有 C^2边界的域来讨论它的拟凸性. 为此先引进穷竭函数的概念.

定义5.5.1 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，φ 是定义在 G 上的实值函数. 如果对任意实数 c，均有

$$\{z\in G:\ \varphi(z)\leqslant c\}\subset\subset G, \tag{1}$$

就称 φ 是 G 的**穷竭函数**.

容易看出，如果 φ 是 G 的一个穷竭函数，那么当 $z\to\partial G$ 时，$\varphi(z)\to\infty$. 如果 G 是有界域，那么满足这个条件的函数一定是 G 的穷竭函数.

由于当 $z\to\partial G$ 时，$-\log d(z)\to\infty$，所以当 G 是有界域时，$-\log d(z)$ 便是它的一个穷竭函数.

定义5.5.2 如果在域 $G\subset\mathbf{C}^n$ 上存在连续的多重次调和穷竭函数，就称 G 是拟凸域.

这样定义的拟凸域不需要假定它具有 C^2 边界，这是 Levi 拟凸域概念的一种推广. 但要说明这种推广是合理的，必须能证明，当 G 具有 C^2 边界时，Levi 拟凸域和现在定义的拟凸域概念是一致的. 为此我们引进

定义5.5.3 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，D 是 $\mathbf{C}$ 中一个开圆盘. 如果对任意一列在 $\overline{D}$ 上连续、在 D 上全纯的映射

$$\varphi_l:\overline{D}\to G,\quad l=1,2,\cdots$$

均能从 $\bigcup_{l=1}^{\infty}\varphi_l(\partial D)\subset\subset G$ 推出 $\bigcup_{l=1}^{\infty}\varphi_l(D)\subset\subset G$，就称 G 具有**圆盘性质**，或称 G 满足**连续性原理**.

具有圆盘性质的域有些什么性质？

定理5.5.4 若 $\mathbf{C}^n$ 中的域 G 具有圆盘性质，则 $-\log d(z)$ 是 G 上的多重次调和函数，这里 $d(z)=d(z,\partial G)$.

证 如果 $-\log d(z)$ 不是多重次调和函数，则必存在 $a\in G$ 和 $b\in\mathbf{C}^n$，使得 $-\log d(a+\lambda b)$ 不是 $\lambda=0$ 附近的次调和函数. 为讨论简单起见，不妨设 $a=0$，$b=e_1=(1,0,\cdots,0)$. 因而 $-\log d(\lambda,0,\cdots,0)$ 不是 $\lambda=0$ 附近的次调和函数. 于是，存在 $r>0$，使得

$$-\log d(0)>\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}-\log d(re^{i\theta},0,\cdots,0)d\theta.$$

记 $D_r=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|<r\}$. 存在在 $\overline{D}_r$ 上连续、在 D_r 中调和的函数 h，使得在 ∂D_r 上有 $h(re^{i\theta})=-\log d(re^{i\theta},0,\cdots,0)$. 再作 $f\in H(D_r)\cap C(\overline{D}_r)$，使得在 D_r 上有

$$\mathrm{Re}f(\lambda)=h(\lambda),\mathrm{Im}f(0)=0.$$

由中值公式，

$$\mathrm{Re}f(0)=h(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(re^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}-\log d\ (re^{i\theta},\ 0,\ \cdots,\ 0)\ d\theta<-\log d(0).$$

记 $\varepsilon=-\log d(0)-\mathrm{Re}f(0)>0$，并命 $g=f+\varepsilon$，于是

$$\mathrm{Re}g(re^{i\theta})=h(re^{i\theta})+\varepsilon=-\log d(re^{i\theta},0,\cdots,0)+\varepsilon, \tag{2}$$

$$\mathrm{Re}g(0)=h(0)+\varepsilon=-\log d(0),\mathrm{Im}g(0)=\mathrm{Im}f(0)=0. \tag{3}$$

选取 $\zeta\in G$，使得 $d(0)=d(0,\zeta)=|\zeta|$. 作一列映射

$$\varphi_l\ (\lambda)\ =\lambda e_1+\left(1-\frac{1}{l}\right)e^{-g(\lambda)}\frac{\zeta}{|\zeta|},\ l=1,\ 2,\ \cdots \tag{4}$$

它在 $\overline{D}_r$ 上连续、在 D_r 上全纯，且当 $\lambda\in\partial D_r$ 时，由（2）可得

$$|\varphi_l\ (\lambda)\ -\lambda e_1|<|e^{-g(\lambda)}|=e^{-\mathrm{Re}g(\lambda)}=e^{-\varepsilon}d(\lambda e_1),$$

这说明 $\varphi_l\ (re^{i\theta})$ 落在以 $re^{i\theta}e_1$ 为中心，$e^{-\varepsilon}d(re^{i\theta}e_1)$ 为半径的球内，即 $\varphi_l\ (\partial D_r)\subset G$，而且 $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\varphi_l\ (\partial D_r)\subset\subset G$. 但若在（4）中取 $\lambda=0$，并注意到（3），即得

$$\lim_{l\to\infty}\varphi_l\ (0)\ =e^{-g(0)}\frac{\zeta}{|\zeta|}=d(0)\ \frac{\zeta}{|\zeta|}=\zeta\in\partial G.$$

因而 $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\varphi_l\ (D)$ 不是 G 中的紧集，这和 G 具有圆盘性质相矛盾. □

什么样的域具有圆盘性质？

定理5.5.5 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯域具有圆盘性质.

证 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯域. 由 Cartan-Thullen 定理，它是全纯凸域. 设 $\{\varphi_l\}$ 是任意一列在圆盘 $\overline{D}$ 上连续、在 D 内全纯的映射，且 $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\varphi_l\ (\partial D)\ \subset\subset G$，记 $K=\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\varphi_l\ (\partial D)$. 我们要证明 $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\varphi_l\ (D)\ \subset\hat{K}$. 为此，任取 $z\in\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\varphi_l\ (D)$，则有 l_0，使得 $z\in\varphi_{l_0}(D)$，因而有 $\lambda_0\in D$，使得 $z=\varphi_{l_0}(\lambda_0)$. 任取 $f\in H(G)$，

$$|f(z)|=|f(\varphi_{l_0}(\lambda_0))|\leqslant\sup_{\lambda\in\partial D}|f(\varphi_{l_0}(\lambda))|\leqslant\sup_{w\in K}|f(w)|.$$

这正好说明 $z\in\hat{K}$. 于是，从 $\hat{K}\subset\subset G$ 即得 $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\varphi_l(D)\subset\subset G$，即 G 具有圆盘性质. □

综合定理5.5.4和定理5.5.5，我们有

定理5.5.6 如果 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯域，那么 $-\log d(z)$ 是 G 上的多重次调和函数.

现在给出 G 是拟凸域的特征.

定理5.5.7 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域的充分必要条件是 G 具有圆盘性质.

证 充分性 如果 G 具有圆盘性质，由定理5.5.4知道，$-\log d(z)$ 是 G 上的连续的多重次调和函数. 于是，当 G 有界时，$-\log d(z)$ 便是 G 上一个连续的多重次调和穷竭函数，所以 G 是拟凸域. 如果 G 无界，取

$$\varphi(z)=|z|^2-\log d(z),$$

由于 $|z|^2$ 和 $-\log d(z)$ 都是多重次调和函数，所以 φ 也是多重次调和函数，且 $\{z\in G: |z|^2-\log d(z)\leqslant c\}$ 是有界集，所以 φ 是 G 的连续的多重次调和穷竭函数，故 G 为拟凸域.

必要性 若 G 是拟凸域，设 φ 是 G 上一个连续的多重次调和穷竭函数. 设 $F_l: \overline{D}\to G$，$l=1, 2, \cdots$ D 是 $\mathbf{C}$ 中一个圆盘，$F_l\in H(D)\cap C(\overline{D})$，且有 $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}F_l(\partial D)\subset\subset G$. 因为 $\overline{\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}F_l(\partial D)}$ 是紧集，故存在常数 c_0，使得当 $z\in\overline{\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}F_l(\partial D)}$ 时，$\varphi(z)\leqslant c_0$. 由 $F_l\in H(D)$，从定理5.4.10知道 $\varphi\circ F_l$ 是 D 上的次调和函数. 根据次调和函数的极值原理，当 $z\in\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}F_l(D)$ 时，也有 $\varphi(z)\leqslant c_0$，即

$$\bigcup_{l=1}^{\infty}F_l(D)\subset\{z\in G: \varphi(z)\leqslant c_0\}.$$

但由穷竭函数的定义，上式右端相对于 G 是紧的，因而

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} F_l(D) \subset\subset G.$$

即 G 具有圆盘性质. □

5.5.2 拟凸域是 Levi 拟凸域的推广

现在可以证明

定理5.5.8 如果 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域 G 具有 C^2 边界，那么 G 是拟凸域的充分必要条件是 G 是 Levi 拟凸域.

证 必要性 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域.，由定理5.5.7知道，G 具有圆盘性质，再由定理5.5.4，$-\log d \in PS(G)$. 由于 G 是 C^2 边界的有界域，故存在 ∂G 的邻域 U，使得 $d(z) \in C^2(U)$（注意，这一事实看起来颇为明显，证明起来并不容易，这儿我们不再给出证明，有兴趣的读者可参阅[Kr. p. 136习题4]）. 根据命题5.4.3可得

$$L_z(-\log d,\ w) \geqslant 0,\ z \in U,\ w \in \mathbf{C}^n. \tag{5}$$

取 G 的定义函数如下：

$$r(z) = \begin{cases} -d(z), & z \in G, \\ 0, & z \in \partial G, \\ d(z,\ G), & z \in \mathbf{C}^n - G. \end{cases} \tag{6}$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(-\log d(z))}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} &= -\frac{1}{d(z)} \frac{\partial^2 d(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + \frac{1}{d^2(z)} \frac{\partial d(z)}{\partial z_j} \frac{\partial d(z)}{\partial \bar{z}_k} \\ &= -\frac{1}{r(z)} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + \frac{1}{r^2(z)} \frac{\partial r(z)}{\partial z_j} \frac{\partial r(z)}{\partial \bar{z}_k}, \end{aligned}$$

所以

$$L_z(-\log d, w) = -\frac{1}{r(z)} L_z(r, w) + \frac{1}{r^2(z)} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial r(z)}{\partial z_j} w_j \right|^2.$$

对于给定的 z，取 $w \in \mathbf{C}^n$，使之满足 $\sum_{j=1}^n \frac{\partial r(z)}{\partial z_j} w_j = 0$. 于是，从(5)可得

$$L_z(r, w) \geqslant 0, \ w \text{ 满足} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r(z)}{\partial z_j} w_j = 0.$$

让 $z \to p \in \partial G$，上式变成

$$L_p(r, w) \geqslant 0, \ w \in T_p^{\mathbf{C}}(\partial G).$$

这就证明了 G 是 Levi 拟凸域.

充分性　如果 G 是 Levi 拟凸域，我们证明 $-\log d(z)$ 在边界附近是多重次调和函数. 如果不是这样，则必存在 $z_0 \in G$，及 $a \in \mathbf{C}^n$，使得

$$C = \left. \frac{\partial^2 \log d(z_0 + \lambda a)}{\partial \lambda \partial \bar{\lambda}} \right|_{\lambda=0} > 0. \tag{7}$$

这里我们应用了定理1.5.8. 在 ∂G 上取点 ζ_0，使得

$$d(z_0, \zeta_0) = |\zeta_0 - z_0| = d(z_0).$$

我们将证明存在 $w \in T_{\zeta_0}^{\mathbf{C}}(\partial G)$，使得 $L_{\zeta_0}(r, w) < 0$，这里 r 是 (6) 式定义的 G 的定义函数，这就和 G 的 Levi 拟凸性相矛盾了. 把 $\log d(z_0 + \lambda a)$ 在 $\lambda = 0$ 处展开得

$$\log d(z_0 + \lambda a) = \log d(z_0) + \mathrm{Re}(A\lambda + B\lambda^2) + C|\lambda|^2 + O(|\lambda|^3), \tag{8}$$

这里

$$A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \log d(z_0)}{\partial z_j} a_j, \quad B = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \log(z_0)}{\partial z_j \partial z_k} a_j a_k,$$

C 就是表达式 (7). 由 (8) 可得

$$\begin{aligned} d(z_0 + \lambda a) &= d(z_0) e^{\mathrm{Re}(A\lambda + B\lambda^2)} e^{C|\lambda|^2 + O(|\lambda|^3)} \\ &= d(z_0) |e^{A\lambda + B\lambda^2}| (1 + C|\lambda|^2 + O(|\lambda|^3)). \end{aligned} \tag{9}$$

命　$z(\lambda) = z_0 + a\lambda + (\zeta_0 - z_0) e^{A\lambda + B\lambda^2}$，由三角形不等式有

$$\begin{aligned} |\zeta_0 - z_0| |e^{A\lambda + B\lambda^2}| &= d(z(\lambda), z_0 + \lambda a) \\ &\geqslant d(z_0 + \lambda a) - d(z(\lambda)), \end{aligned}$$

所以由(9)得

$$d(z(\lambda)) \geqslant d(z_0 + \lambda a) - d(z_0) |e^{A\lambda + B\lambda^2}|$$

$$=d(z_0)|e^{A\lambda+B\lambda^2}|(C|\lambda|^2+O(|\lambda|^3)).$$

由于$C>0$，所以当λ充分小，但$\lambda\neq0$时，有$d(z(\lambda))>0$，即$z(\lambda)\in G$；而当$\lambda=0$时，有$d(z(0))=d(\zeta_0)=0$. 所以函数$d(z(\lambda))$在$\lambda=0$处取极小值，因而有

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}d(z(\lambda))\bigg|_{\lambda=0}=0. \tag{10}$$

把$d(z(\lambda))$在$\lambda=0$处展开，由于零次项和一次项都等于0，而$d(z(\lambda))>0$，所以有

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\bar{\lambda}}d(z(\lambda))\bigg|_{\lambda=0}>0. \tag{11}$$

由于$r(z)=-d(z)$是G的定义函数，从(10)和(11)得

$$0=-\frac{\partial d(z(\lambda))}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=\frac{\partial r(z(\lambda))}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r(\zeta_0)}{\partial z_j}\frac{\partial z_j(0)}{\partial\lambda},$$

$$0>-\frac{\partial^2 d(z(\lambda))}{\partial\lambda\partial\bar{\lambda}}\bigg|_{\lambda=0}=\frac{\partial^2 r(z(\lambda))}{\partial\lambda\partial\bar{\lambda}}=\sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial^2 r(\zeta_0)}{\partial z_j\partial\bar{z}_l}\frac{\partial z_j(0)}{\partial\lambda}\overline{\frac{\partial z_l(0)}{\partial\lambda}}.$$

取$w_j=\dfrac{\partial z_j(0)}{\partial\lambda}$，$j=1,2,\cdots,n$，就得到了矛盾. 这样我们证明了$-\log d(z)$在$\partial G$附近是多重次调和函数. 因为$G$是有界域，所以$-\log d(z)$便是$G$的一个连续的多重次调和穷竭函数，所以$G$是拟凸域. □

现在很容易证明下面的

定理5.5.9 $\mathbf{C}^n$中的全纯域一定是拟凸域.

证 由定理5.5.5知道，全纯域具有圆盘性质. 再由定理5.5.7,具有圆盘性质的域一定是拟凸域,因而全纯域必是拟凸域. □

一个自然的问题是:拟凸域是否一定是全纯域?这是 Levi 在1910年提出的一个问题. 他首先就一些特殊情形证明上面问题的答案是肯定的. 一般的情形就成了有名的 Levi 猜测. 到1942年,Oka 解决了$n=2$的情形,1954年,Oka,Norguet 和 Bremermann 同时解

决了这个问题. 复流形上的 Levi 问题是由 Grauert 在1958年用层论的方法解决的. 到本世纪60年代中期, Kohn, Hörmander 等用 $\bar{\partial}$ 算子的 L^2 估计解决了 Levi 问题. 因此, Levi 问题长期以来对多复变的发展起着重要的影响. 下一章中我们将用 $\bar{\partial}$ 算子的 L^2 估计来解决 Levi 问题, 即给出拟凸域一定是全纯域的证明.

5.5.3 拟凸域上存在 C^∞ 的强多重次调和穷竭函数

在下一章的讨论中, 我们要用到拟凸域的一个深刻的性质. 按照定义5.5.2, 拟凸域上存在连续的多重次调和穷竭函数. 实际上, 我们可由这个连续的多重次调和穷竭函数出发, 构造出一个 C^∞ 的强多重次调和穷竭函数.

定理5.5.10 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域, 则在 G 上存在 C^∞ 的强多重次调和穷竭函数.

证 根据拟凸域的定义, 在 G 上存在连续的多重次调和穷竭函数, 设其为 u. 命

$$G_j=\{z: z\in G, u(z)\leqslant j\}, \quad j=0, 1, 2, \cdots$$

则 $G_j\subset\subset G$. 记 $\delta_j=\frac{1}{2}d(G_j, \mathbf{C}^n-G)$, 则 $\delta_j\to 0$. 命

$$v_j(z)=\int_{|\xi|<1} u(z-\delta_j\xi)\chi(\xi)dm(\xi),$$

这里 χ 如定理5.4.8中所示. 再命

$$u_j(z)=v_j(z)+\delta_j|z|^2, \quad j=0, 1, 2, \cdots$$

那么和定理5.4.8的证法一样, 可以证明 u_j 是 G_j 上的 C^∞ 的强多重次调和函数, 而且满足不等式

$$u(z)\leqslant u_j(z)<u(z)+1, \quad j=0, 1, 2, \cdots$$

现取 $\varphi\in C^\infty(\mathbf{R})$, 使得 φ 是递增的凸函数, 当 $t\leqslant 0$时, $\varphi(t)=0$; 当 $t>0$时, $\varphi'(t)>0$. 现用归纳法证明, 对于给定的自然数 k, 一定能找到正数 $a_1, \cdots, a_k$, 使得在 G_k 上有

$$\psi_k(z)=\varphi(u_0+1)+\sum_{j=1}^{k}a_j\varphi(u_j(z)+1-j)\geqslant u(z),$$

且 ψ_k 是 C^∞ 的强多重次调和函数. 当 $z\in G_0$时，$u(z)\leqslant 0$，而 $\varphi(u_0+1)\geqslant 0$,故在 G_0 上有 $\varphi(u_0+1)\geqslant u$. 显然，$\varphi(u_0+1)$ 在 G_0上是 C^∞的强多重次调和函数. 若已经选出 a_1，…，a_{k-1}，使得 $\psi_{k-1}(z)=\varphi(u_0+1)+\sum_{j=1}^{k-1}a_j\varphi(u_j(z)+1-j)\geqslant u(z)$ 在 G_{k-1}上成立，且 ψ_{k-1}是 G_{k-1}上的 C^∞强多重次调和函数. 写$\psi_k(z)=\psi_{k-1}(z)+a_k\varphi(u_k+1-k)$，这里 a_k 待定，因为 $G_k=(G_k-G_{k-1})\cup G_{k-1}$，显然，当 $z\in G_{k-1}$时，$\psi_k(z)\geqslant u(z)$ 成立. 当 $z\in G_k-G_{k-1}$时，有 $k-1<u(z)\leqslant u_k(z)$，因而可选择充分大的 a_k，使得 $a_k\varphi(u_k+1-k)\geqslant u$ 成立. 而 ψ_{k-1}在 G_k-G_{k-1}上非负，因而在 G_k-G_{k-1}上也有 $\psi_k(z)\geqslant u(z)$. 同样道理，ψ_k 在 G_k 上也是 C^∞的强多重次调和函数. 今设 K 是 G 中任意紧集，则必存在 $m>0$，使得 $K\subset G_m$. 于是，当 $j\geqslant m+2$，$z\in K\subset G_m$ 时有

$$u_j(z)+1-j<u(z)+2-j<m+2-j\leqslant 0,$$

因而 $\varphi(u_j(z)+1-j)=0$，所以有

$$\psi_j(z)=\psi_{m+1}(z),\ j>m+1,\ z\in K.$$

这说明$\{\psi_k\}$在 G 的任意紧子集上一致收敛，若记 $\psi(z)=\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k(z)$，则 ψ 就是 G 上的 C^∞强多重次调和穷竭函数. □

综合§5.4和§5.5中的结果，我们已经证明了

定理5.5.11 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，那么下列五条性质等价：

(i) G 是拟凸域；

(ii) G 具有圆盘性质；

(iii) G 是全纯域；

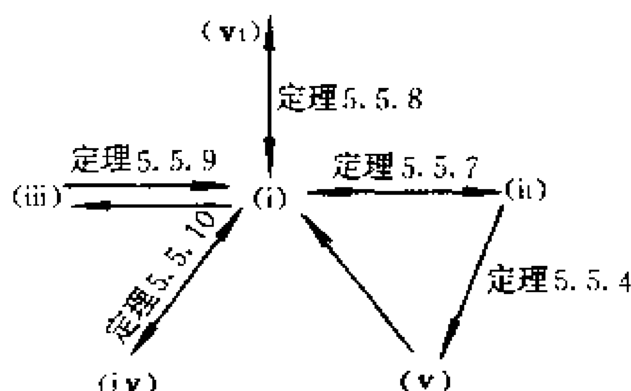
(iv) G 上存在 C^∞的强多重次调和穷竭函数；

(v) $-\log d(z)$ 是 G 上的多重次调和函数；

如果 G 是具有 C^2边界的有界域，那么上述五条性质和下面的性质等价：

(vi) G 是 Levi 拟凸域.

证 各条性质之间的推导关系如下图所示：



(v) → (i) 的证明已蕴涵在定理5.5.7中，唯有 (i) → (iii) 的证明将留待第六章.

[注记]

§5.1和§5.2的结果主要都是由 H. Cartan 和 P. Thullen [CT] 得到的. 在两个变数的情况下，全纯域满足 Levi 条件这一事实是由 E. E. Levi 在1910年证明的. 1933年 J. Krzoska 在他的博士论文中把它推广到 n 个变数. 定理5.3.13是 J. J. Kohn [Ko] 在1963年证明的. 两个变数的多重次调和函数的概念首先是由 Oka [Oka] 在1941年引进的，1953年他把它推广到 n 个变数的情形，当时 Oka 把这种函数叫做拟凸函数. 1945年 P. Lelong [Le1] 又独立地引入了多重次调和函数的概念，他称这种函数为多重次调和函数，一直沿用至今. §5.4中关于多重次调和函数的性质大部分是由他们得到的. 关于多重次调和函数和实的凸函数之间的相似性，有兴趣的读者可参阅 [Br2]. $-\log d(z)$ 在拟凸域上的多重次调和性 (定理5.5.11 (i) → (v)) 首先是由 Oka [Oka] 在 $\mathbf{C}^2$ 中证明的. 一般的情形由 Oka [Oka, 155~157] P. Lelong [Le2] 和 H. Bremermann [Br2] 所证明.

第六章　$\bar{\partial}$问题及其应用

第五章中我们已经证明了全纯域一定是拟凸域. 反过来的问题是：拟凸域是否一定是全纯域?这就是著名的 Levi 猜测或 Levi 问题. 本世纪60年代中期，由 Andreotti，Vesentini，Morrey，Kohn 和 Hörmander 等人发展起来的 L^2估计方法，把 Levi 问题的研究归结为 $\bar{\partial}$ 问题的可解性及对解的估计. 本章将介绍 L^2估计方法，并用它来解决 Levi 问题.

§6.1　两项准备知识

在下面的讨论中，我们将要用到函数的光滑化方法和 Sobolev 空间的概念，作为准备知识，我们将先分别予以介绍.

6.1.1　函数的光滑化

函数的光滑化是指，对任意 $u\in L^2(\mathbf{R}^N)$，要找一列函数 $u_l\in(C^\infty\cap L^2)(\mathbf{R}^N)$，使得当 $l\to\infty$时，有$\|u-u_l\|_{L^2}\to 0$. 这个从 u 找 $\{u_l\}$ 的方法称为函数的光滑化方法或 Friedrichs 正则化方法. 其实，类似的方法在证明定理5.4.8和定理5.5.10时都已用过.

如证明定理5.4.8那样，取 χ：$\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$，使其满足下列条件：

(i) $\chi\in C^\infty(\mathbf{R}^N)$；

(ii) $\mathrm{supp}\chi$ 是紧集；

(iii) $\chi\geqslant 0$；

(iv) $\int_{\mathbf{R}^N}\chi(x)dm(x)=1$.

这样的函数不难找到. 例如，取

$$\psi(x)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

如果记 $c=\int_{\mathbf{R}^N}\psi(x)dm(x)$，那么 $\chi(x)=\frac{1}{c}\psi(x)$ 就是满足上述条件的函数.

现在可以证明

定理6.1.1 设 χ 是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ 中的非负函数，且满足

$$\int_{\mathbf{R}^N}\chi(x)dm(x)=1,\ \operatorname{supp}\chi\subset\{x\in\mathbf{R}^N:|x|\leqslant 1\},$$

记 $\chi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^N}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. 如果对 $u\in L^2(\mathbf{R}^N)$，命

$$u_\varepsilon(x)=(u*\chi_\varepsilon)(x)=\int_{\mathbf{R}^N}u(x-y)\chi_\varepsilon(y)dm(y),$$

那么 (i) $u_\varepsilon\in(C^\infty\cap L^2)(\mathbf{R}^N)$；

(ii) $\operatorname{supp}u_\varepsilon\subset\{x: d(x,\operatorname{supp}u)\leqslant\varepsilon\}$；

(iii) 当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\|u_\varepsilon-u\|_{L^2}\to 0$.

这里的 (ii) 说明，如果 $\operatorname{supp}u$ 是紧的，那么 $\operatorname{supp}u_\varepsilon$ 也是紧的；(iii) 说明 $\{u_\varepsilon\}$ 就是 u 的一个光滑化序列.

证 (i) 把 $u_\varepsilon(x)$ 改写成

$$u_\varepsilon(x)=\int_{\mathbf{R}^N}u(y)\ \chi_\varepsilon(x-y)dm(y),$$

便知 $u_\varepsilon(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^N)$. 下面证明 $\|u_\varepsilon\|_{L^2}\leqslant\|u\|_{L^2}$. 事实上

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2&=\int_{\mathbf{R}^N}|u_\varepsilon(x)|^2dm(x)\\&=\int_{\mathbf{R}^N}\left|\int_{\mathbf{R}^N}u(x-y)\chi_\varepsilon(y)dm(y)\right|^2dm(x)\\&\leqslant\int_{\mathbf{R}^N}\left\{\int_{\mathbf{R}^N}|u(x-y)|\chi_\varepsilon(y)dm(y)\right\}^2dm(x)\\&\leqslant\int_{\mathbf{R}^N}\left\{\int_{\mathbf{R}^N}|u(x-y)|^2\chi_\varepsilon(y)dm(y)\right\}\\&\quad\cdot\left\{\int_{\mathbf{R}^N}\chi_\varepsilon(y)dm(y)\right\}dm(x)\end{aligned}$$

$$=\int_{\mathbf{R}^N}\chi_\varepsilon(y)dm(y)\int_{\mathbf{R}^N}|u(x-y)|^2dm(x)=\|u\|_{L^2}^2,$$

这里我们用了等式$\int_{\mathbf{R}^N}\chi_\varepsilon(y)dm(y)=1$. 由于$u\in L^2(\mathbf{R}^N)$，所以$u_\varepsilon(x)\in L^2(\mathbf{R}^N)$.

(ii) 任取 $x_0\in \mathrm{supp}u_\varepsilon$. 我们先设 $u(x_0)\neq 0$. 如果 $d(x_0, \mathrm{supp}u)>\varepsilon$，那么 $B(x_0,\varepsilon)\cap\mathrm{supp}u=\varnothing$. 由于 $\mathrm{supp}\chi_\varepsilon=\{\chi:|\chi|\leqslant\varepsilon\}$，所以

$$u_\varepsilon(x_0)=\int_{|y|\leqslant\varepsilon}u(x_0-y)\chi_\varepsilon(y)dm(y)$$

$$=\int_{|x_0-w|\leqslant\varepsilon}u(w)\chi_\varepsilon(x_0-w)dm(w)=0,$$

这和 $u_\varepsilon(x_0)\neq 0$矛盾. 再设 $u_\varepsilon(x_0)=0$，则必有 $x_k\to x_0$，而$u_\varepsilon(x_k)\neq 0$. 由上面的讨论知道，$d(x_k,\mathrm{supp}u)\leqslant\varepsilon$. 让 $k\to\infty$，即得 $d(x_0,\mathrm{supp}u)\leqslant\varepsilon$.

(iii)由于 $u\in L^2(\mathbf{R}^N)$，对于任给的 $\delta>0$，存在具有紧支集的连续函数 v，使得

$$\|u-v\|_{L^2}<\frac{\delta}{3}. \tag{1}$$

由 (i) 所证，对于任意的 $\varepsilon>0$有

$$\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_{L^2}\leqslant\|u-v\|_{L^2}<\frac{\delta}{3}. \tag{2}$$

记 $K=\mathrm{supp}v$，则 K 是紧集，取定 $\eta>0$，记

$$K_\eta=\{x\in\mathbf{R}^N: d(x,K)\leqslant\eta\},$$

则 K_η 也是紧集. 由于 v 在 K_η 上连续，因而一致连续，故存在 $\eta'>0$，当 $x,x'\in K_\eta$，且$|x-x'|<\eta'$ 时，$|v(x)-v(x')|<\frac{\delta}{3m(K_\eta)}$，这里 $m(K_\eta)$ 记 K_η 在 $\mathbf{R}^N$ 中的体积. 今取 $\varepsilon<\min(\eta',\frac{1}{2}\eta)$，则当 $x\in K_\varepsilon$，$|y|<\varepsilon$时，$x-y\in K_{2\varepsilon}\subset K_\eta$，因而

$$|v(x-y)-v(x)|<\frac{\delta}{3m(K_\eta)}.$$

于是

$$\max_{x\in K_\varepsilon}|v_\varepsilon(x)-v(x)|$$

$$\leqslant \max_{x\in K_\varepsilon}\int_{\mathbf{R}^N}|v(x-y)-v(x)|\chi_\varepsilon(y)\,dm(y)$$

$$=\max_{x\in K_\varepsilon}\int_{|y|\leqslant\varepsilon}|v(x-y)-v(x)|\chi_\varepsilon(y)dm(y)<\frac{\delta}{3m(K_\eta)}.$$

因为 $\mathrm{supp}v=K$，由（ii）知 $\mathrm{supp}v_\varepsilon\subset K_\varepsilon$，所以 $\mathrm{supp}\,(v_\varepsilon-v)\subset K_\varepsilon$. 于是

$$\|v_\varepsilon-v\|_{L^2}=\left\{\int_{\mathbf{R}^N}|v_\varepsilon(x)-v(x)|^2dm(x)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\int_{K_\varepsilon}|v_\varepsilon(x)-v(x)|^2dm(x)\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{\delta}{3}. \quad (3)$$

综合（1），（2），（3），即得

$$\|u_\varepsilon-u\|_{L^2}\leqslant\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_{L^2}+\|v_\varepsilon-v\|_{L^2}+\|v-u\|_{L^2}<\delta.$$

即当 $\varepsilon\to0$时，$\|u_\varepsilon-u\|_{L^2}\to0$. □

注意，虽然上面的讨论是对 $u\in L^2(\mathbf{R}^N)$ 进行的，其实所有结论对 $u\in L^p(\mathbf{R}^N)$，$1\leqslant p<\infty$也都成立.

6.1.2 $\mathbf{R}^N$上的 Sobolev 空间

设 G 是$\mathbf{R}^N$中的开集，对于 $f\in C^\infty(G)$ 及非负整数 s，定义

$$\|f\|_s^2=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D^\alpha f\|_{L^2}^2=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\int_G|(D^\alpha f)(x)|^2dm(x),$$

这里 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$是多重指标，$(D^\alpha f)(x)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$. 记

$$A_s(G)=\{f\in C^\infty(G):\|f\|_s<\infty\}.$$

对于 $f,g\in A_s(G)$，定义它们的内积

$$\langle f,g\rangle_s=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\int_G(D^\alpha f)(x)\overline{(D^\alpha g)(x)}dm(x),$$

特别

$$\langle f,g\rangle_0 = \int_G f(x)\overline{g(x)}dm(x)$$

就是普通 $L^2(G)$ 中的内积，简记为 $\langle f, g\rangle$. 由 Schwarz 不等式

$$|\langle f,g\rangle_s| \leqslant \|f\|_s\|g\|_s.$$

现设 $\{f_j\}$ 是 A_s (G) 中的 Cauchy 序列，即当 j, $k\to\infty$时，$\|f_j-f_k\|_s\to 0$. 按照$\|f\|_s$ 的定义，对于任意$|\alpha|\leqslant s$，均有

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f_k\|_{L^2} \to 0, \quad j,k\to\infty.$$

特别当 $\alpha=(0,\cdots,0)$ 时，有$\|f_j-f_k\|_{L^2}\to 0$，即 $\{f_j\}$ 是$L^2(G)$中一个 Cauchy 序列. 由于 $L^2(G)$ 是完备的，所以存在 $f\in L^2(G)$，使得$\|f_j-f\|_{L^2}\to 0$，$j\to\infty$. 这个 f 是由 A_s (G) 中的 Cauchy 序列 $\{f_j\}$ 所确定的. 把所有这种 f 添加到 $A_s(G)$ 上去，所得的空间称为 $A_s(G)$ 按范数$\|\cdot\|_s$ 的完备化空间.

定义6.1.2 $A_s(G)$按范数$\|\cdot\|_s$ 的完备化空间称为 **Sobolev 空间**，记为 $W^s(G)$.

为了弄清 Sobolev 空间 $W^s(G)$ 的构造，我们引进弱导数的概念.

设 $f\in C^\infty((a, b))$，$\varphi\in C_0^\infty((a, b))$，则由分部积分法

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi^{(m)}(x)}dx = (-1)^m\int_a^b f^{(m)}(x)\overline{\varphi(x)}dx,$$

即 $\langle f, \varphi^{(m)}\rangle = (-1)^m \langle f^{(m)}, \varphi\rangle$. 根据这个简单的事实，我们给出下面的

定义6.1.3 设 $f\in L^2(G)$. 如果存在 $h\in L^2(G)$，使得对任意$\varphi\in C_0^\infty(G)$，总有

$$\langle f,D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle h,\varphi\rangle,$$

就称 h 为 f 的 α 阶弱导数，记为 $D^\alpha f=h$（弱）. 这时称 f 的 α 阶弱导数存在.

显然，如果 f 的 α 阶弱导数 h 存在，则在 L^2 (G) 上 h 是唯

一的，即若 $D^\alpha f=h$，$D^\alpha f=g$，则 h 和 g 在 G 上几乎处处相等. 如果 f 是 C^∞ 函数，那么它的弱导数就是普通的导数. 这样就把导数的概念推广到 L^2（G）函数上去了.

容易看出，弱导数的运算和普通导数是一样的，即若 f，$g\in L^2(G)$，且弱导数 $D^\alpha f$，$D^\alpha g$ 存在，那么对任意复数 a，b 有

$$D^\alpha(af+bg)=aD^\alpha f+bD^\alpha g.$$

又若弱导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 存在，$g\in C^\infty(G)$ 且 $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ 在 G 上有界，则

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fg)=\frac{\partial g}{\partial x_j}f+g\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

这些都可按弱导数的定义直接验证.

对于 Sobolev 空间来说，有下面的

命题6.1.4 如果 $f\in W^s(G)$，则对任意 α，$|\alpha|\leqslant s$，弱导数 $D^\alpha f$ 存在.

证 根据 $W^s(G)$ 的定义，存在 $A_s(G)$ 中的 Cauchy 序列 $\{f_j\}$，当 $j\to\infty$ 时，$\|f_j-f\|_{L^2}\to 0$. 因而，当 j，$k\to\infty$ 时，有 $\|f_j-f_k\|_s\to 0$. 由此推出，对任意 α，$|\alpha|\leqslant s$ 有

$$\|D^\alpha f_j-D^\alpha f_k\|_{L^2}\to 0,\quad j,k\to\infty.$$

因为 $L^2(G)$ 是完备的，所以存在 $h\in L^2(G)$，使得当 $j\to\infty$ 时，有 $\|D^\alpha f_j-h\|_{L^2}\to 0$. 任取 $\varphi\in C_0^\infty(G)$，则有

$$\begin{aligned}\langle f,D^\alpha\varphi\rangle&=\lim_{j\to\infty}\langle f_j,D^\alpha\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\lim_{j\to\infty}\langle D^\alpha f_j,\varphi\rangle\\&=(-1)^{|\alpha|}\langle h,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

此即 $D^\alpha f=h$（弱）. □

现在可以在 $W^s(G)$ 中定义内积.

设 f，$g\in W^s(G)$，定义它们的内积

$$\langle f,g\rangle_s=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\int_G(D^\alpha f)(x)\overline{(D^\alpha g)(x)}dm(x),$$

这里 $D^\alpha f$，$D^\alpha g$ 都是弱导数.

如果 $f, g \in A_s(G)$，那么上面的定义和原来的相一致．特别

$$\|f\|_s^2 = \langle f, f \rangle_s = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2.$$

在这个内积下，$W^s(G)$ 是一个 Hilbert 空间．

下面证明命题6.1.4的逆也是成立的，为此先证

命题6.1.5 设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，如果 $x \in G$，$d(x, \partial G) > \varepsilon$，弱导数 $D^\alpha f$ 存在，那么

$$D^\alpha (f * \chi_\varepsilon)(x) = ((D^\alpha f) * \chi_\varepsilon)(x),$$

这里 χ_ε 是定理6.1.1中定义的函数．

证 因为 $d(x, \partial G) > \varepsilon$，所以 $B(x, \varepsilon) \subset G$．于是

$$\begin{aligned} D^\alpha (f * \chi_\varepsilon)(x) &= D^\alpha \left\{ \int_G f(y) \chi_\varepsilon (x-y) dm(y) \right\} \\ &= \int_G f(y) D_x^\alpha \chi_\varepsilon (x-y) dm(y) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_G f(y) D_y^\alpha \chi_\varepsilon (x-y) dm(y) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \int_G D^\alpha f(y) \chi_\varepsilon (x-y) dm(y) \\ &= ((D^\alpha f) * \chi_\varepsilon)(x). \ \square \end{aligned}$$

现在证明

定理6.1.6 Sobolev 空间 $W^s(G)$ 可表示为

$W^s(G) = \{f \in L^2(G)$：当 $|\alpha| \leqslant s$ 时，弱导数 $D^\alpha f$ 存在$\}$．

证 若把满足上式右端条件的函数的全体记为 $P_s(G)$，则命题6.1.4已证 $W^s(G) \subset P_s(G)$．现在要证 $P_s(G) \subset W^s(G)$．任取 $f \in P_s(G)$，则 $f \in L^2(G)$，且对任意 α，$|\alpha| \leqslant s$，弱导数 $D^\alpha f$ 存在．我们要证明，存在 $f_j \in A_s(G)$，使得当 $j \to \infty$ 时，$\|f_j - f\|_s \to 0$．任取有理点 $a_j \in G$，则必存在充分小的 r_j，使得 $\overline{B}(a_j, r_j) \subset G$，当 a_j 走遍 G 中的有理点时，所得的球列 $\{B(a_j, r_j)\}$ 覆盖了 G．取从属于 $\{B(a_j, r_j)\}$ 的单位分解 $\{\eta_j\}$，则对任意 j，$\mathrm{supp}(\eta_j f) \subset\subset G$．对任意 α，$|\alpha| \leqslant s$ 及固定的 j，弱导数

$D^{\alpha}(\eta_j f)\in L^2(G)$. 于是，由定理6.1.1得知，当 $\varepsilon\to 0$时，有

$$\|D^{\alpha}(\eta_j f) * \chi_{\varepsilon} - D^{\alpha}(\eta_j f)\|_{L^2} \to 0.$$

这就是说，对任意一列趋于0的正数 δ_k，存在 $\varepsilon(j,k)>0$，使得当 $|\alpha|\leqslant s$ 时，有

$$\|D^{\alpha}(\eta_j f) * \chi_{\varepsilon(j,k)} - D^{\alpha}(\eta_j f)\|_{L^2} < \frac{\delta_k}{2^j}.$$

命 $f_{\delta_k}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\eta_j f) * \chi_{\varepsilon(j,k)}$，显然 $f_{\delta_k}\in C^{\infty}(G)\cap L^2(G)$. 对每个 α，$|\alpha|\leqslant s$，利用命题6.1.5，即得

$$\begin{aligned}
\|D^{\alpha}f_{\delta_k} - D^{\alpha}f\|_{L^2} &= \Big\|D^{\alpha}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(\eta_j f) * \chi_{\varepsilon(j,k)}\Big) - D^{\alpha}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j f\Big)\Big\|_{L^2} \\
&= \Big\|\sum_{j=1}^{\infty}(D^{\alpha}(\eta_j f) * \chi_{\varepsilon(j,k)} - D^{\alpha}(\eta_j f))\Big\|_{L^2} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\|D^{\alpha}(\eta_j f) * \chi_{\varepsilon(j,k)} - D^{\alpha}(\eta_j f)\|_{L^2} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\delta_k}{2^j} = \delta_k \to 0.
\end{aligned}$$

因而有$\|f_{\delta_k}-f\|_s\to 0$，$k\to\infty$. □

定理6.1.6有时也被用来作为Sobolev 空间$W^s(G)$的定义. 这个定理使我们弄清了 $W^s(G)$ 的构造，它是由 $L^2(G)$ 中那些具有弱导数 $D^{\alpha}f$ ($|\alpha|\leqslant s$) 的函数 f 所构成. 当然，具有弱导数的函数未必具有普通的导数. 但下面的 Sobolev 引理断言，具有高阶弱导数的函数必具有一定阶数的普通导数.

定理6.1.7 (Sobolev 引理)　设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，如果 $s>\frac{N}{2}$，k 是任意的非负整数，那么

$$W^{s+k}(G)\subset C^k(G).$$

为此要先证下面的

引理6.1.8 (Sobolev 不等式)　设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开集，K 是

G 中的紧集. 如果 $s>\frac{N}{2}$，则必存在常数 $C>0$，使得对每一个 $f\in A_s(G)$ 均有

$$\max_{x\in K}|f(x)|\leqslant C\|f\|_s$$

证 因为 K 是 G 中的紧集，故必存在 $\rho>0$，使得对每一个 $a\in K$ 都有 $B(a,\rho)\subset G$. 取定义在 $[0,\infty)$ 中的函数 η，使得 $\eta\in C^{\infty}([0,\rho])$，$\mathrm{supp}\eta\subset[0,\rho)$，且当 $r\in\left[0,\frac{\rho}{2}\right]$ 时，有 $\eta(r)\equiv1$. 对固定的 $a\in K$，通过 η 可定义 $\mathbf{R}^N$ 上的函数 $\eta(|x-a|)$，仍用 η 简记之. 任取 $f\in A_s(G)$，并用极坐标，f 可写为

$$f(x_1,\cdots,x_N)=f(r\cos\theta_1,r\sin\theta_1\cos\theta_2,\cdots,r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1}),$$

在 η 的定义中取 $a=0$，则 $\eta(|x|)=\eta(r)$. 由分部积分法可得

$$\int_0^{\rho}r^{s-1}\frac{\partial^s(\eta f)}{\partial r^s}dr=(-1)^s(s-1)!f(0),$$

或者

$$f(0)=(-1)^s\frac{1}{(s-1)!}\int_0^{\rho}r^{s-1}\frac{\partial^s(\eta f)}{\partial r^s}dr.$$

让上式两端在单位球面上积分，记单位球面的面积为 σ_0，并注意到体积元素和面积元素的关系为 $dm=r^{N-1}drd\sigma$，就有

$$\begin{aligned}f(0)\sigma_0&=(-1)^s\frac{1}{(s-1)!}\int_{\partial B}\int_0^{\rho}r^{s-1}\frac{\partial^s(\eta f)}{\partial r^s}drd\sigma.\\&=(-1)^s\frac{1}{(s-1)!}\int_{\partial B}\int_0^{\rho}r^{s-N}\frac{\partial^s(\eta f)}{\partial r^s}r^{N-1}drd\sigma\\&=(-1)^s\frac{1}{(s-1)!}\int_{B(0,\rho)}r^{s-N}\frac{\partial^s(\eta f)}{\partial r^s}dm.\end{aligned}$$

用 Schwarz 不等式得

$$|f(0)\sigma_0|\leqslant\frac{1}{(s-1)!}\left(\int_{B(0,\rho)}r^{2(s-N)}dm\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{B(0,\rho)}\left|\frac{\partial^s(\eta f)}{\partial r^s}\right|^2dm\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{4}$$

由于 $s>\frac{N}{2}$，所以 $2(s-N)>-N$，右端第一个积分收敛. 由于 $B(0,\rho)\subset G$，右端第二个积分不超过

$$\left(\int_G\left|\frac{\partial^s(\eta f)}{\partial r^s}\right|^2 dm\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D^\alpha(\eta f)\|_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D^\alpha f\|_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$=C\|f\|_s.$$

于是由 (4) 即得

$$|f(0)|\leqslant C\|f\|_s,$$

这里 C 代表一个常数，它在不同的地方出现可以取不同的值. 对于 K 中任意点 a，取 η 为 $\eta(|x-a|)$，所有的讨论都在 $B(a,\rho)$ 上进行，即可得同样的结论. □

定理6.1.7的证明 设 $f\in W^{s+k}(G)$，我们要证明 f 在 G 上几乎处处等于 $C^k(G)$ 中的一个函数. 根据 $W^{s+k}(G)$ 的定义，存在一列 $\{f_j\}\subset A_{s+k}(G)$，使得当 $j\to\infty$ 时，$\|f_j-f\|_{s+k}\to 0$. 因而当 $i\to\infty$，$j\to\infty$ 时，有 $\|f_i-f_j\|_{s+k}\to 0$. 由于 $f_i-f_j\in A_{s+k}(G)$，所以对任意 α，$|\alpha|\leqslant k$，$D^\alpha(f_i-f_j)\in A_s(G)$. 于是，由引理6.1.8，对任意紧集 $K\subset G$，有

$$\max_{x\in K}|D^\alpha f_i(x)-D^\alpha f_j(x)|\leqslant C\|D^\alpha f_i-D^\alpha f_j\|_s$$

$$\leqslant C\|f_i-f_j\|_{s+k}\to 0.$$

这就证明了 $\{D^\alpha f_j\}$ 在 K 上一致收敛. 特别取 $\alpha=(0,\cdots,0)$，就有 $\{f_j\}$ 在 K 上一致收敛. 设其极限函数为 g，由于 $\{D^\alpha f_j\}$ 也在 K 上一致收敛，因而有 $D^\alpha f_j\to D^\alpha g$，所以 $g\in C^k(K)$. 这时当然有 $\|f_j-g\|_{L^2(K)}\to 0$ $(j\to\infty)$. 另外从 $\|f_j-f\|_{s+k}\to 0$，当然也有 $\|f_j-f\|_{L^2(K)}\to 0$，所以 f 在 K 上几乎处处等于 g，因为 K 是 G 中任意的紧集，所以 f 在 G 上几乎处处等于 g. □

Sobolev 引理是研究偏微分方程解的正则性的重要工具，它

在偏微分方程的近代研究中十分重要.

§ 6.2 把 $\bar{\partial}$ 问题归结为 L^2 估计

6.2.1 加权的平方可积空间

在§4.5中我们曾经提到过,$\mathbf{C}^n$ 中(p,q)形式的一般形状为

$$f=\sum_{|I|=p}\sum_{|J|=q}f_{IJ}(z)dz_I\wedge d\bar{z}_J,$$

这里 $I=(i_1,\cdots,i_p)$, $J=(j_1,\cdots,j_q)$, $dz_I=dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}$, $d\bar{z}_J=d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_q}$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n$. $\bar{\partial}$ 算子把 (p,q) 形式映为 $(p,q+1)$ 形式. 所谓 $\bar{\partial}$ 问题是指给定一个 $(p,q+1)$ 形式 f, 要找一个 (p,q) 形式 u, 使得 $\bar{\partial}u=f$ 成立. 由于 $\bar{\partial}^2=0$, 所以上述问题有解的必要条件是 $\bar{\partial}f=0$.

当 $p=q=0$时, $\bar{\partial}$ 问题可叙述为: 给定一个 $(0,1)$ 形式 $f=\sum\limits_{j=1}^n f_j(z)d\bar{z}_j$ 满足 $\bar{\partial}f=0$, 要找一个函数 u, 使得 $\bar{\partial}u=f$. 在§4.7中, 我们利用平面上非齐次的 Cauchy 积分公式, 已经讨论过平面上的 $\bar{\partial}$ 问题, 以及高维的具有紧支集的 $\bar{\partial}$ 问题.

下面我们将从 Hilbert 空间的角度来考察一般的 $\bar{\partial}$ 问题, 最后把求解问题归结为证明一个不等式.

定义 6.2.1 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集, $f: G\to\mathbf{C}$ 是可测函数, $\varphi: G\to\mathbf{R}$ 是连续函数, 定义

$$L^2(G,\varphi)=\left\{f:\int_G|f|^2e^{-\varphi}dm<\infty\right\},$$

这里 dm 是 G 中的 Lebesgue 测度, φ 称为**权函数**, $L^2(G,\varphi)$ 称为**加权的平方可积空间**.

设 f, $g\in L^2(G,\varphi)$, 定义它们的内积为

$$\langle f,g\rangle_\varphi=\int_G f\bar{g}e^{-\varphi}dm,$$

$$\|f\|_\varphi^2 = \langle f,f\rangle_\varphi = \int_G |f|^2 e^{-\varphi} dm,$$

则 $L^2(G,\varphi)$ 是一个 Hilbert 空间. 同样定义

$L^2_{(p,q)}(G,\varphi) = \{f: f$ 是 (p,q) 形式，它的系数 $f_{IJ}\in L^2(G,\varphi)\}$.

设 $f,g\in L^2_{(p,q)}(G,\varphi)$，定义它们的内积为

$$\langle f,g\rangle_\varphi = \sum_{I,J}\int_G f_{IJ}\overline{g}_{IJ}e^{-\varphi}dm,$$

$$\|f\|_\varphi^2 = \langle f,f\rangle_\varphi = \sum_{I,J}\int_G |f_{IJ}|^2 e^{-\varphi}dm,$$

记 $|f|^2=\sum_{I,J}|f_{IJ}|^2$，则 $\|f\|_\varphi^2=\int_G |f|^2e^{-\varphi}dm$. 这时 $L^2_{(p,q)}(G,\varphi)$ 也成一个 Hilbert 空间.

设 $f=\sum_{I,J}f_{IJ}dz_I\wedge d\overline{z}_J\in L^2_{(p,q)}(G,\varphi)$，则

$$\overline{\partial}f = \sum_{I,J}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \overline{z}_k}d\overline{z}_k\wedge dz_I\wedge d\overline{z}_J.$$

由于 f_{IJ} 不是可微函数，这里的 $\frac{\partial f_{IJ}}{\partial\overline{z}_k}$ 是 f_{IJ} 的弱导数，这时仍有 $\overline{\partial}f\in L^2_{(p,q+1)}(G,\varphi)$，但 $\overline{\partial}f$ 未必属于 $L^2_{(p,q+1)}(G,\varphi_1)$，$\varphi_1$ 是另一个权函数.

我们把扩大定义后的 $\overline{\partial}$ 算子记为 T 或 S，T 的定义域 $D(T)$ 是指

$$D(T) = \{f\in L^2_{(p,q)}(G,\varphi_1): Tf\in L^2_{(p,q+1)}(G,\varphi_2)\}.$$

T 和 S 的作用如下：

$$L^2_{(p,q)}(G,\varphi_1)\xrightarrow{T}L^2_{(p,q+1)}(G,\varphi_2)\xrightarrow{S}L^2_{(p,q+2)}(G,\varphi_2).$$

6.2.2 $\overline{\partial}$ 算子的基本性质

为了把 $\overline{\partial}$ 问题抽象为一般的 Hilbert 空间中的问题，注意算于

$T=\bar{\partial}$的下列性质：

(i) T 是线性算子；

(ii) $D(T)$ 在 $L^2_{(p,q)}(G, \varphi_1)$ 中稠；

用 $D_{(p,q)}(G)$记G中的(p,q)形式f，其系数 $f_{IJ}\in C_0^\infty(G)$，即在 G 中有紧支集的无穷可微函数. 显然，$D_{(p,q)}(G)\subset D(T)$. 对于任意$f\in L^2_{(p,q)}(G, \varphi_1)$可取具有紧支集的连续函数 u_{IJ}，使得$\|f_{IJ}-u_{IJ}\|_{L^2}<\varepsilon$. 因为 u_{IJ}有紧支集，故由定理6.1.1 (ii)，存在 $(u_{IJ})_\varepsilon\in C_0^\infty(G)$，使得$\|(u_{IJ})_\varepsilon-u_{IJ}\|_{L^2}\to 0$，当 $\varepsilon\to 0$. 于是得 $\|f_{IJ}-(u_{IJ})_\varepsilon\|_{L^2}\to 0$，这说明 $D_{(p,q)}(G)$ 在 $L^2_{(p,q)}(G, \varphi_1)$ 中稠，因而 $D(T)$ 在 $L^2_{(p,q)}(G, \varphi_1)$中稠.

(iii) T 是闭算子.

设 $u_k\in D(T)$，$u_k\to u$，$Tu_k\to v$，要证明

$$u\in D(T),\text{且 } v=Tu.$$

事实上，因为 $u_k\to u$，所以 $u\in L^2_{(p,q)}(G, \varphi_1)$. 由于 T 在弱导数的意义下是连续的，所以 $Tu_k\to Tu$，因而 $Tu\in L^2_{(p,q+1)}(G, \varphi_2)$，所以 $u\in D(T)$，且 $v=Tu$.

6.2.3 $\bar{\partial}$问题的 Hilbert 空间模型.

知道了 T 的这些性质后，便可把$\bar{\partial}$问题抽象为一般的 Hilbert 空间模型.

设 H_1，H_2，H_3是三个 Hilbert 空间，T，S 是两个线性算子，它们有关系

$$H_1\xrightarrow{T}H_2\xrightarrow{S}H_3.$$

T，S 还满足下述条件：

(i) $D(T)$，$D(S)$ 分别在 H_1，H_2中稠；

(ii) T，S 是线性的闭算子；

(iii) $TS=0$ (这是因为 $\bar{\partial}^2=0$).

如果 $Sf=0$，问 $Tu=f$ 在 H_1中是否有解？

容易看出，$Tu=f$ 在 H_1 中有解的充分必要条件是

$$\langle Tu,g\rangle_{H_2}=\langle f,g\rangle_{H_2} \tag{1}$$

对 H_2 中某一稠密子集中的任意 g 成立.

在什么条件下才能使（1）成立?让我们回忆一下 T 的伴随算子 T^* 的定义.

因为 T 的定义域 $D(T)$ 在全空间 H_1 是稠的，即 $T: H_1\to H_2$ 是稠定算子. 今定义

$$D(T^*)=\{y: y\in H_2, \exists\ y^*\in H_1, \forall\ x\in D(T)$$
$$使\langle Tx,y\rangle=\langle x,y^*\rangle 成立\}.$$

不难证明，对于给定的 $y\in D(T^*)$，对应的 y^* 是唯一的. 这就确定了算子 $T^*: y\to y^*$，称 T^* 为 T 的伴随算子. 因而对任意的 $x\in D(T)$，$y\in D(T^*)$，有

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle.$$

我们知道 T^* 有下列性质：

(i) 稠定线性算子 T 的伴随算子 T^* 是线性算子；

(ii) 稠定线性算子 T 的伴随算子 T^* 是闭算子；

(iii) 如果 T 是闭算子，那么 $(T^*)^*=T$.

容易知道，T^* 对 $D_{(p,q+1)}(G)$ 中的元素都有定义，即 $D_{(p,q+1)}(G)\subset D(T^*)$，因而

(iv) $D(T^*)$ 在 H_2 中稠.

今设 E 是 H_2 中的稠子集，(1) 对每个 $g\in E$ 成立. 如果 $E\subset D(T^*)$，则因 $\langle Tu,g\rangle=\langle u,T^*g\rangle$，(1) 可改写为

$$\langle u,T^*g\rangle=\langle f,g\rangle. \tag{2}$$

记

$$H'_1=\{T^*g: g\in E\subset D(T^*)\},$$

则 $H'_1\subset H_1$. 定义 h：$H'_1\to\mathbf{C}$ 如下：

$$h(T^*g)=\langle g,f\rangle_{H_2}.$$

h 是定义在 H_1' 上的一个线性泛函. 如果能把 h 扩展成定义在整个空间 H_1 上的一个有界线性泛函，那么根据 Riesz 表示定理，存在 $u\in H_1$，使得 $h(T^*g)=\langle T^*g,u\rangle$，即 $\langle T^*g,u\rangle=\langle g,f\rangle$，这就是 (2). 因而 u 就是 $Tu=f$ 的解.

在什么条件下，h 能扩展成全空间 H_1 上的有界线性泛函?

命题6.2.2 如果存在只依赖于 f 的常数 C_f，使得

$$|\langle g,f\rangle|\leqslant C_f\|T^*g\|, g\in E\subset D(T^*), \tag{3}$$

则 $h(T^*g)=\langle g,f\rangle$ 可以扩展成 H_1 上的有界线性泛函.

证 先证在条件 (3) 下，泛函 $h(T^*g)=\langle g,f\rangle$ 的定义有意义. 因为如果 $T^*g_1=T^*g_2$，那么

$$|\langle g_1-g_2,f\rangle|\leqslant C_f\|T^*(g_1-g_2)\|=0,$$

因而 $\langle g_1,f\rangle=\langle g_2,f\rangle$. 现在先把 h 扩充到 $\overline{H'}$ 上. 设 $x\in\overline{H'}_1$，则存在 $T^*g_l\in H'_1$，使得 $T^*g_l\to x$，$l\to\infty$. 于是由 (3) 得

$$|\langle g_l-g_m,f\rangle|\leqslant C_f\|T^*g_l-T^*g_m\|\to 0, l,m\to\infty.$$

这说明 $\{\langle g_l,f\rangle\}$ 是 $\mathbf{C}$ 中的 Cauchy 数列. 今定义

$$h(x)=\lim_{l\to\infty}\langle g_l,f\rangle.$$

因为 $\overline{H_1'}$ 是 H_1 的一个闭子空间，命 P 是 H_1 到 $\overline{H_1'}$ 上的投影算子，即对任意 $x\in H_1$，存在唯一的 $x_0\in\overline{H_1'}$，使得 $Px=x_0$. 今定义 $h(x)=h(x_0)$. 这样 h 就在整个空间 H_1 中都有了定义. 下面证明 h 是 H_1 上的有界线性泛函. 任取 x，$y\in H_1$，它们唯一地对应着 x_0，$y_0\in\overline{H_1'}$. 如果 x_0，$y_0\in H_1'$，那么

$$\begin{aligned}
h(\alpha x+\beta y)&=h(\alpha x_0+\beta y_0)=h(\alpha T^*g_1+\beta T^*g_2)\\
&=h(T^*(\alpha g_1+\beta g_2))=\langle\alpha g_1+\beta g_2, f\rangle\\
&=\alpha\langle g_1, f\rangle+\beta\langle g_2, f\rangle\\
&=\alpha h(T^*g_1)+\beta h(T^*g_2)\\
&=\alpha h(x_0)+\beta h(y_0)=\alpha h(x)+\beta h(y).
\end{aligned}$$

属于闭包的情况可通过极限证明之，所以 h 是线性的.

有界性的证明也很容易. 对于任意 $x \in H_1$,

$$
\begin{aligned}
|h(x)| &= |h(x_0)| = |h(T^* g)| \\
&= |\langle g, f\rangle| \leqslant C_f \|T^* g\| = C_f \|x_0\| \\
&\leqslant C_f \|x\|.
\end{aligned}
$$

x_0属于闭包的情况可通过极限来证明. □

现在问, 在什么条件下, (3) 能成立?注意, 上面的讨论并没有对 f 加以限制. 实际上, 只要对满足 $Sf=0$的 f 讨论就行了. 记

$$
N(S) = \{x \in H_2 : Sx = 0\}, R(T) = \{Tx : x \in D(T)\}.
$$

称 $N(S)$ 为算子 S 的零空间, $R(T)$ 为算子 T 的像空间. $N(S)$, $R(T)$ 和 $N(T^*)$间有下述包含关系.

引理 6.2.3 $N(S)^{\perp} \subset R(T)^{\perp} \subset N(T^*)$.

证 任取 $x \in N(S)^{\perp}$, $y \in R(T)$, 则必存在 $h \in D(T)$, 使得 $y = Th$. 由于 $ST=0$, 所以 $Sy = STh = 0$, 即 $y \in N(S)$, 因而 $x \perp y$, 这说明 $x \in R(T)^{\perp}$. 这就证明了 $N(S)^{\perp} \subset R(T)^{\perp}$. 再取 $x \in R(T)^{\perp}$, 则对任意 $y \in R(T)$, 有 $\langle x, y\rangle = 0$. 而 $y = Th$, $h \in D(T)$, 因而 $\langle x, Th\rangle = 0$,即 $\langle T^* x, h\rangle = 0$. 由于 y 是任意的, 因而 h 也是任意的, 所以 $T^* x = 0$, 即 $x \in N(T^*)$, 因而 $R(T)^{\perp} \subset N(T^*)$. □

现在可以证明

命题 6.2.4 设 $D(T^*) \cap D(S)$ 在 H_2中稠. 如果存在常数 C, 使得对每个 $g \in D(T^*) \cap D(S)$, 有

$$
\|g\|^2 \leqslant C(\|T^* g\|^2 + \|Sg\|^2), \tag{4}
$$

那么

$$
|\langle g, f\rangle| \leqslant \sqrt{C} \|f\| \|T^* g\| \tag{5}
$$

对每个 $f \in N(S)$ 和 $g \in D(T^*) \cap D(S)$ 成立.

证 任取 $g \in D(T^*) \cap D(S)$. 把 g 对闭子空间 $N(S)$ 作正交分解: $g = g_1 + g_2$, 这里 $g_1 \in N(S)$, $g_2 \in N(S)^{\perp}$. 我们证明 g_1, g_2

都在 $D(T^*)\cap D(S)$ 中.事实上，因为 $g_1\in N(S)$，所以 $Sg_1=0$，因而 $g_1\in D(S)$.其次，由引理6.2.3，从 $g_2\in N(S)^{\perp}$ 得知$g_2\in N(T^*)$，即$T^*g_2=0$，因而$g_2\in D(T^*)$. 由于$g\in D(T^*)\cap D(S)$，所以 $g_1=g-g_2\in D(T^*)$，因而 $g_1\in D(T^*)\cap D(S)$. 于是 $g_2=g-g_1\in D(T^*)\cap D(S)$. 这样

$$
\begin{aligned}
|\langle g,f\rangle| &= |\langle g_1+g_2,f\rangle| = |\langle g_1,f\rangle+\langle g_2,f\rangle| \\
&= |\langle g_1,f\rangle| \qquad (\text{因为 } g_2\in N(S)^{\perp}, f\in N(S)) \\
&\leqslant \|f\|\|g_1\| \\
&\leqslant \sqrt{C}\|f\|(\|T^*g_1\|^2+\|Sg_1\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad (\text{因为 } g_1\in D(T^*)\cap D(S), \text{由}(4)) \\
&= \sqrt{C}\|f\|\|T^*g_1\| \\
&\qquad\qquad (\text{因为 } g_1\in N(S), \text{所以 } Sg_1=0) \\
&= \sqrt{C}\|f\|\|T^*(g-g_2)\| \\
&= \sqrt{C}\|f\|\|T^*g\|. \\
&\qquad\qquad (\text{因为 } g_2\in N(S)^{\perp}\subset N(T^*)). \square
\end{aligned}
$$

这样一来，全部问题归结为，在什么条件下，不等式（4）成立. 上面的结论可总结为下面的

定理 6.2.5 设 $D(T^*)\cap D(S)$ 在 H_2中稠. 如果存在常数 C，使得对每一个 $g\in D(T^*)\cap D(S)$，有

$$\|g\|^2\leqslant C(\|T^*g\|^2+\|Sg\|^2), \tag{4}$$

那么 $Tu=f$ 对 $f\in N(S)$ 有解，且解 u 满足

(i) $\|u\|\leqslant\sqrt{C}\|f\|$；

(ii) 存在 $v\in D(T^*)$，使得 $u=T^*v$；

(iii) $u\in N(T)^{\perp}$.

(4) 称为基本不等式.

证 $Tu=f$ 对 $f\in N(S)$ 有解这一事实已在上面证明. 现在证明解 u 满足上面三条性质. 因为线性泛函 h 的界是 $\sqrt{C}\|f\|$，故由

Riesz 表示定理$\|u\|\leqslant\sqrt{C}\|f\|$，这就是（i）．为了证明（ii），我们先证明存在 $\{g_k\}\subset D(T^*)$，使得

$$u=\lim_{k\to\infty}T^*g_k. \tag{6}$$

因为按照泛函 h 的扩展过程，对一般的 $x\in H_1$，对 $\overline{H_1}$ 作正交分解 $x=x_0+x_1$，其中 $x_0\in\overline{H_1}$，$x_1\in(\overline{H_1})^{\perp}$. 然后定义 $h(x)=h(x_0)$．现在让 $x\in(\overline{H_1})^{\perp}$，这时 $x_0=0$. 于是

$$h(x)=h(x_0)=h(0)=0=\langle x,u\rangle,$$

这说明 $u\in\overline{H_1}$，因而有 $u=\lim\limits_{k\to\infty}T^*g_k$. 其次我们再证明

$$T^*(D(T^*))=T^*(N(S)\cap D(T^*)). \tag{7}$$

右端包含在左端内是显然的．今取 $g\in D(T^*)$，把 g 对 $N(S)$ 作正交分解：$g=g_1+g_2$，$g_1\in N(S)$，$g_2\in N(S)^{\perp}$．由引理6.2.3 $N(S)^{\perp}\subset N(T^*)$，所以 $T^*g=T^*g_1$，故（7）成立．由于（7），不妨设（6）中的 $g_k\in N(S)\cap D(T^*)$．在命题6.2.4的不等式（5）中命 $f=g=g_k$，可得$\|g_k\|\leqslant\sqrt{C}\|T^*g_k\|$. 因为 $\{T^*g_k\}$ 收敛，所以

$$\|g_k-g_l\|\leqslant\sqrt{C}\|T^*g_k-T^*g_l\|\to 0,\quad k,l\to\infty.$$

即 $\{g_k\}$ 是一个 Cauchy 序列．设 $g_k\to v$，由于 T^*是闭算子，所以 $v\in D(T^*)$，且 $u=T^*v$，这就证明了（ii）．（iii）的证明很简单，任取 $x\in N(T)$，由（ii）即得

$$\langle x,u\rangle=\langle x,T^*v\rangle=\langle Tx,v\rangle=0.$$

所以 $u\in N(T)^{\perp}$. □

这个定理说明，当基本不等式（4）满足时，$\bar{\partial}u=f$ 对 $f\in N(S)$ 有解，而且解u 具有定理6.2.5中的性质．注意，条件（4）是 $\bar{\partial}$方程有解的充分条件，并不必要，即若（4）不成立，$\bar{\partial}$方程也可能有解，但这时解 u 就不一定具有定理6.2.5中的性质了．以后我们将看到，具有定理6.2.5（ii）的解有良好的性质．为了区别于其它的解，我们给出下面的

定义 6.2.6 设 u 是方程 $\bar{\partial}u=f$ 的一个解，如果存在 $v\in D(T^*)$，使得$u=T^*v$，就称 u 为方程的一个**标准解**或 **Kohn 解**.

定理6.2.5断言，当基本不等式（4）成立时，$\bar{\partial}u=f$ 对 $f\in N(S)$ 一定有标准解.

§6.3 $\bar{\partial}$问题解的存在性定理

现在回到我们的问题，这时

$$H_1=L^2_{(p,q)}(G,\varphi_1),H_2=L^2_{(p,q+1)}(G,\varphi_2),H_3=L^2_{(p,q+2)}(G,\varphi_3),$$

这里 φ_1，φ_1，φ_3是三个权函数，它们都是实值连续函数.

我们现在要证明：如果 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域，那么对任意 $g\in D(T^*)\cap D(S)$，有

$$\|g\|^2_{\varphi_2}\leqslant C\ (\|T^*g\|^2_{\varphi_1}+\|Sg\|^2_{\varphi_3}).\tag{1}$$

证明的思路是这样的：

(i) 先在一定的条件下，证明对任意 $g\in D\ (T^*)\cap D\ (S)$ 必有 $h_k\in D_{(p,q-1)}$ (G)，使得在相应的范数下，有

$$h_k\rightarrow g,\ T^*h_k\rightarrow T^*g,\ Sh_k\rightarrow Sg.$$

因而只要对 $g\in D_{(p,q+1)}$ (G) 证明不等式（1）就行了.

(ii) 适当选取 φ_1，φ_2，φ_3，使（i）中需要的条件得到满足. 然后再在一定的条件下，对 $g\in D_{(p,q+1)}(G)$ 证明基本不等式（1）成立.

(iii) 对 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域，证明（ii）中需要的条件是成立的，因而基本不等式（1）对任意 $g\in D\ (T^*)\cap D(S)$ 成立.

6.3.1 用 $D_{(p,q+1)}(G)$ 中的元素逼近 $D(T^*)\cap D(S)$ 中的元素

先证明下面的

引理6.3.1 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，则必存在满足下面三个条件

的函数列 $\{\eta_j\}$:

(i) $\eta_j \in C_0^\infty(G)$;

(ii) 对任意 $z \in G$, $0 \leqslant \eta_j(z) \leqslant 1$;

(iii) 对于 G 的任一紧集 K, 存在正整数 j_0, 当 $j > j_0$时, $\eta_j(z) \equiv 1$在 K 上成立.

证 取 G 的一个正规穷竭 $\{K_j\}$ (见引理4.6.4), 命 g_j 是 K_j 上的特征函数. 设 $\delta_j = d(K_j, \partial G)$, 取 $\epsilon_j = \frac{1}{2}\delta_j$, 作

$$\eta_j(x) = (g_j * \chi_{\epsilon_j})(x),$$

则由定理6.1.1知道 η_j 在 G 中有紧支集,且无穷次可微,因而 $\eta_j \in C_0^\infty(G)$. 显然$0 \leqslant \eta_j \leqslant 1$. 对于任意紧集 $K \subset G$, 有充分大的 j, 使得 $K \subset K' \subset K_j$, 其中 $K' = \{y: |x-y| \leqslant \epsilon_j, x \in K\}$. 于是, 当 $x \in K$ 时, 便有

$$\eta_j(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} g_j(y)\chi_{\epsilon_j}(x-y)dm(y) = \int_{K'} g_j(y)\chi_{\epsilon_j}(x-y)dm(y)$$

$$= \int_{K'} \chi_{\epsilon_j}(x-y)dm(y) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_{\epsilon_j}(x-y)dm(y) = 1.$$

因此 $\{\eta_j\}$ 便是所求的序列. □

引理6.3.2 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域, $\eta \in C_0^\infty(G)$, 且满足

$$e^{-\varphi_{j+1}} \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_l} \right|^2 \leqslant e^{-\varphi_j}, \quad j=1, 2, \tag{2}$$

那么 (i) 对于 $f = \sum_{I,J} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$, 有

$$|\bar{\partial}(\eta f) - \eta \bar{\partial} f|^2 e^{-\varphi_{j+1}} \leqslant |f|^2 e^{-\varphi_j}, \quad j=1, 2; \tag{3}$$

(ii) 如果 $f \in D(T^*)$, 那么 $\eta f \in D(T^*)$.

证 (i) 因为 $\bar{\partial}\eta = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l$, $\bar{\partial}(\eta f) = \bar{\partial}\eta \wedge f + \eta \bar{\partial} f$, 所以

$$|\bar\partial(\eta f)-\eta\bar\partial f|^2=|\bar\partial\eta\wedge f|^2=|\sum_{I,J}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\eta}{\partial\bar z_l}f_{IJ}d\bar z_l\wedge d\bar z_I\wedge d\bar z_J|^2$$

$$\leqslant\sum_{I,J}\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial\eta}{\partial\bar z_l}\right|^2|f_{IJ}|^2.$$

于是由（2）即得

$$|\bar\partial(\eta f)-\eta\bar\partial f|^2e^{-\varphi_{j+1}}=\sum_{I,J}|f_{IJ}|^2\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial\eta}{\partial\bar z_l}\right|^2e^{-\varphi_{j+1}}<|f|^2e^{-\varphi_j}.$$

（ii）要证明 $\eta f\in D(T^*)$，就是要证明对于任意 $u\in D(T)$，存在 $v\in L^2_{(p,q)}(G,\varphi_1)$，使得 $\langle Tu,\eta f\rangle_{\varphi_2}=\langle u,v\rangle_{\varphi_1}$. 为此只要证明 $\langle Tu,\eta f\rangle_{\varphi_2}$是 u 的有界线性泛函就行. 事实上，

$$\begin{aligned}\langle Tu,\eta f\rangle_{\varphi_2}&=\langle\bar\eta Tu,f\rangle_{\varphi_2}=\langle T(\bar\eta u),f\rangle_{\varphi_2}+\langle\bar\eta Tu-T(\bar\eta u),f\rangle_{\varphi_2}\\&=\langle u,\eta T^*f\rangle_{\varphi_1}+\langle\bar\eta Tu-T(\bar\eta u),f\rangle_{\varphi_2},\end{aligned}$$

和式的第一项由 Schwarz 不等式得

$$|\langle u,\eta T^*f\rangle_{\varphi_1}|\leqslant\|\eta T^*f\|_{\varphi_1}\|u\|_{\varphi_1}.$$

第二项由 Schwarz 不等式以及(i)可得

$$|\langle\bar\eta Tu-T(\bar\eta u),f\rangle_{\varphi_2}|\leqslant\|f\|_{\varphi_2}\|\bar\eta Tu-T(\bar\eta u)\|_{\varphi_2}\leqslant\|f\|_{\varphi_2}\|u\|_{\varphi_1}.$$

由此即知 $\langle Tu,\eta f\rangle_{\varphi_2}$是 $L^2_{(p,q)}(G,\varphi_1)$ 上的有界线性泛函. 由 Riesz 表示定理，存在 $v\in L^2_{(p,q)}(G,\varphi_1)$，使得 $\langle Tu,\eta f\rangle_{\varphi_2}=\langle u,v\rangle_{\varphi_1}$，因而 $\eta f\in D(T^*)$，且 $v=T^*(\eta f)$. □

在证明过程中，需要用到伴随算子 T^* 的表达式.

引理6.3.3 设 $f=\sum_{I,J}f_{IJ}dz_I\wedge d\bar z_J\in D(T^*)$，这里 $|I|=p$，$|J|=q+1$，那么

$$T^*f=(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}e^{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-\varphi_2}f_{I,jK})dz_I\wedge d\bar z_K\tag{4}$$

或者

$$e^{\varphi_2-\varphi_1}T^*f=(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{I,jK}}{\partial z_j}-f_{I,jK}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_j}\right)dz_I\wedge d\bar z_K,\tag{5}$$

这里 $|K|=q$，$\varphi_2\in C^1(G)$.

证 取 $u=\sum_{I,K}u_{IK}dz_I\wedge d\bar{z}_K\in D_{(p,q)}(G)$，那么

$$Tu=\bar{\partial}u=\sum_{|I|=p}\sum_{|K|=q}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_{IK}}{\partial\bar{z}_j}d\bar{z}_j\wedge dz_I\wedge d\bar{z}_K$$

$$=(-1)^p\sum_{|I|=p}\sum_{|K|=q}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_{IK}}{\partial\bar{z}_j}dz_I\wedge d\bar{z}_j\wedge d\bar{z}_K,$$

$$\langle f,Tu\rangle_{\varphi_2}=(-1)^p\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}\int_G f_{I,jK}\frac{\partial\bar{u}_{IK}}{\partial z_j}e^{-\varphi_2}dm$$

$$=(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}\int_G\bar{u}_{IK}\frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-\varphi_2}f_{I,jK})\,dm$$

$$=(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}\int_G e^{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-\varphi_2}f_{I,jK})\,e^{-\varphi_1}\bar{u}_{IK}dm.\tag{6}$$

上面第二个等式用了分部积分公式，因为 u_{IK} 有紧支集. 另一方面，

$$\langle T^*f,u\rangle_{\varphi_1}=\sum_{I,K}\int_G(T^*f)_{IK}\bar{u}_{IK}e^{-\varphi_1}dm.$$

由于 $\langle f,Tu\rangle_{\varphi_2}=\langle T^*f,u\rangle_{\varphi_1}$，把上式和（6）比较即得

$$(T^*f)_{IK}=(-1)^{p-1}\sum_{j=1}^{n}e^{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-\varphi_2}f_{I,jK}).$$

因面

$$T^*f=(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}e^{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-\varphi_2}f_{I,jK})\,dz_I\wedge d\bar{z}_K.$$

上式也可写为

$$T^*f=(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}e^{\varphi_1}\left(e^{-\varphi_2}\frac{\partial}{\partial z_j}f_{I,jK}-e^{-\varphi_2}f_{I,jK}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_j}\right)dz_I\wedge d\bar{z}_K.$$

由此即得（5）. □

现在可以证明

命题6.3.4 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$\{\eta_k\}$ 是引理6.3.1中的函数列. 如果 $\varphi_2\in C^1(G)$，且

$$e^{\varphi_{j+1}}\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial\eta_k}{\partial\bar{z}_l}\right|^2\leqslant e^{-\varphi_j},\quad j=1,\ 2;\ k=1,\ 2,\ \cdots \tag{7}$$

那么对于任意 $f\in D(T^*)\cap D(S)$，存在 $h_k\in D_{(p,q+1)}(G)$，使得当 $k\to\infty$ 时，有

$$\|h_k-f\|_{\varphi_2}\to 0,\quad \|T^*h_k-T^*f\|_{\varphi_1}\to 0,\quad \|Sh_k-Sf\|_{\varphi_3}\to 0.$$

证明的思路 证明分为两部分：

（一）先证对于任意 $f\in D(T^*)\cap D(S)$，必有具有紧支集的 $g_k\in D(T^*)\cap D(S)$，使得当 $k\to\infty$ 时，有

$$\|g_k-f\|_{\varphi_2}\to 0,\ \|T^*g_k-T^*f\|_{\varphi_1}\to 0,\ \|Sg_k-Sf\|_{\varphi_3}\to 0. \tag{8}$$

（二）对于具有紧支集的 $f\in D(T^*)\cap D(S)$，证明存在 $h_k\in D_{(p,q+1)}(G)$，使得当 $k\to\infty$ 时，有

$$\|h_k-f\|_{\varphi_2}\to 0,\quad \|T^*h_k-T^*f\|_{\varphi_1}\to 0,\quad \|Sh_k-Sf\|_{\varphi_3}\to 0. \tag{9}$$

证 （一） 对于任意的 $f\in D\ (T^*)\ \cap D\ (S)$，命 $g_k=\eta_k f$，则 g_k 就满足（8）．因为 η_k 有紧支集．所以 g_k 有紧支集．现在先来证明（8）的第三个极限式．由引理6.3.2（i）可得

$$|\bar{\partial}\ (\eta_k f)\ -\eta_k\bar{\partial}f|^2e^{-\varphi_3}<|f|^2e^{-\varphi_2},$$

由于 $f\in L^2_{(p,q+1)}(G,\ \varphi_2)$，上式右端可积，根据 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\|S(\eta_k f)-\eta_k Sf\|^2_{\varphi_3}&=\int_G\lim_{k\to\infty}|S(\eta_k f)-\eta_k Sf|^2e^{-\varphi_3}dm\\&=\lim_{l\to\infty}\int_{K_l}\lim_{k\to\infty}|S(\eta_k f)-\eta_k Sf|^2e^{-\varphi_3}dm=0,\end{aligned} \tag{10}$$

这里 $\{K_l\}$ 是 G 的一个正规穷竭，当 l 取定时，能取到充分大的 k_0，当 $k>k_0$ 时，η_k 在 K_l 上恒等于1，因而被积函数为0．因为 $f\in D(S)$，按照定义 $Sf\in L^2_{(p,q+2)}(G,\varphi_3)$．由于 $|\eta_k Sf-Sf|\leqslant 2|Sf|$，故可用控制收敛定理，得

$$\lim_{k\to\infty}\|\eta_k Sf-Sf\|_{\varphi_3}=\int_G\lim_{k\to\infty}|\eta_k Sf-Sf|^2e^{-\varphi_3}dm$$

$$=\lim_{l\to\infty}\int_{K_l}\lim_{k\to\infty}|\eta_k Sf-Sf|^2 e^{-\varphi_3}dm=0. \tag{11}$$

于是，从（10），（11）即得

$$\|Sg_k-Sf\|_{\varphi_3}\leqslant\|S(\eta_k f)-\eta_k Sf\|_{\varphi_3}+\|\eta_k Sf-Sf\|_{\varphi_3}\to 0.$$

这就是（8）的第三个极限式.（8）的第一个极限式用控制收敛定理直接可得. 最后证（8）的第二式. 由引理6.3.2（ii），$\eta_k f\in D(T^*)$ 于是

$$\begin{aligned}
&|\langle T^*(\eta_k f)-\eta_k T^* f,u\rangle_{\varphi_1}|\\
&=|\langle T^*(\eta_k f),u\rangle_{\varphi_1}-\langle\eta_k T^* f,u\rangle_{\varphi_1}|\\
&=|\langle\eta_k f,Tu\rangle_{\varphi_1}-\langle T^* f,\eta_k u\rangle_{\varphi_1}|\\
&=|\langle f,\eta_k Tu\rangle_{\varphi_1}-\langle f,T(\eta_k u)\rangle_{\varphi_1}|\\
&=|\langle f,\eta_k Tu-T(\eta_k u)\rangle_{\varphi_2}|.
\end{aligned}$$

再用引理6.3.2(i)，即得

$$\begin{aligned}
\left|\int_G(T^*(\eta_k f)-\eta_k T^* f)\bar{u}e^{-\varphi_1}dm\right|&\leqslant\int_G|f||\eta_k Tu-T(\eta_k u)|e^{-\varphi_2}dm\\
&\leqslant\int_G|f||u|e^{-\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\varphi_2}{2}}\cdot e^{-\varphi_2}dm\\
&=\int_G|f||u|e^{-\frac{\varphi_1}{2}-\frac{\varphi_2}{2}}dm.
\end{aligned}$$

取 $u=T^*(\eta_k f)-\eta_k T^* f$，并注意到它的支集在 $G-K_k$ 中，上式可写为

$$\begin{aligned}
&\int_G|T^*(\eta_k f)-\eta_k T^* f|^2 e^{-\varphi_1}dm\\
&\leqslant\int_G|f||T^*(\eta_k f)-\eta_k T^* f|e^{-\frac{\varphi_1}{2}-\frac{\varphi_2}{2}}dm\\
&=\int_{G-K_k}|f|e^{-\frac{\varphi_2}{2}}|T^*(\eta_k f)-\eta_k T^* f|e^{-\frac{\varphi_1}{2}}dm
\end{aligned}$$

$$\leqslant\left(\int_{G-K_k}|f|^2e^{-\varphi_2}dm\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{G-K_k}|T^*(\eta_kf)-\eta_kT^*f|^2e^{-\varphi_1}dm\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是得

$$\|T^*(\eta_kf)-\eta_kT^*f\|_{\varphi_1}\leqslant\left(\int_{G-K_k}|f|^2e^{-\varphi_2}dm\right)^{\frac{1}{2}}\to0,k\to\infty.$$

用类似于上面的方法,即可证得

$$\|T^*g_k-T^*f\|_{\varphi_1}\to0,\ k\to\infty.$$

（二）设 $f=\sum_{I,J}f_{IJ}dz_I\wedge d\bar{z}_J\in D(T^*)\cap D(S)$，它在 G 中有紧支集，即 f_{IJ} 在 G 中有公共的紧支集. 规定

$$(f*\chi_\varepsilon)(x)=\sum_{I,J}(f_{IJ}*\chi_\varepsilon)(x)dz_I\wedge d\bar{z}_J.$$

即 $f_\varepsilon(x)=\sum_{I,J}(f_{IJ})_\varepsilon dz_I\wedge d\bar{z}_J$. 设 f_{IJ} 的公共紧支集为 K，则由定理6.1.1，$(f_{IJ})_\varepsilon$ 的紧支集为

$$K_1=\{x:d(x,K)\leqslant\varepsilon\}.$$

取 ε 充分小，可使 $K_1\subset G$. 因而 $(f_{IJ})_\varepsilon\in C_0^\infty(G)$，而且 $\|(f_{IJ})_\varepsilon-f_{IJ}\|_{L^2}\to0$. 因而当 $\varepsilon\to0$ 时，$\|f_\varepsilon-f\|_{\varphi_2}\to0$，这里 $f_\varepsilon\in D_{(p,q+1)}(G)$. 由命题6.1.5知道，$Sf_\varepsilon=(Sf)_\varepsilon$，因而当 $\varepsilon\to0$ 时，

$$\|Sf_\varepsilon-Sf\|_{\varphi_3}=\|(Sf)_\varepsilon-Sf\|_{\varphi_3}\to0.$$

最后来证明当 $\varepsilon\to0$ 时，$\|T^*f_\varepsilon-T^*f\|_{\varphi_1}\to0$. 根据引理6.3.3中 T^*f 的表达式（5),若记

$$\theta f=(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_{I,jK}}{\partial z_j}dz_I\wedge d\bar{z}_K,$$

$$af=(-1)^p\sum_{I,K}\sum_{j=1}^nf_{I,jK}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_j}dz_I\wedge d\bar{z}_K,$$

则

$$e^{\varphi_2-\varphi_1}T^*f=\theta f+af.$$

由命题6.1.5 可得

$$(\theta+a)\ f_\varepsilon=\theta f_\varepsilon+af_\varepsilon=\ (\theta f)_\varepsilon+af_\varepsilon$$
$$=((\theta+a)\ f)_\varepsilon-\ (af)_\varepsilon+af_\varepsilon.$$

根据定理6.1.1知道，上式在 L^2 中收敛于

$$(\theta+a)f-af+af=(\theta+a)f.$$

此即 $\|T^*f_\varepsilon-T^*f\|_{\varphi_1}\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$. 取 $h_k=\ (f)_{\frac{1}{k}}$，即得（二）的证明.

现在对任意的 $f\in D(T^*)\cap D(S)$，按照（一）有一列具有紧支集的 $\{g_k\}\subset D(T^*)\cap D(S)$，使得（8）成立. 对于每个 g_k，按照（二）有 $\{g_{kl}\}\subset D_{(p,q+1)}(G)$，使得（9）成立. 对每个 g_k，必能在 $\{g_{kl}\}$ 中选出一个，记为 h_k，使得 $\|g_k-h_k\|_{\varphi_2}<\frac{1}{k}$，同时使另外两式也成立. 对任意 $\varepsilon>0$，取 $k>k_0$，使得

$$\|f-g_k\|_{\varphi_2}<\frac{\varepsilon}{2},\ \ \|g_k-h_k\|_{\varphi_2}<\frac{1}{k}<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是 $\|f-h_k\|_{\varphi_2}<\varepsilon$，另外两式也同时成立，$\{h_k\}$ 即为所求. □

6.3.2 基本不等式成立的条件

因为基本不等式（1）只涉及到 $\|f\|_{\varphi_2}$，$\|T^*f\|_{\varphi_1}$，$\|Sf\|_{\varphi_3}$ 这三个量，有了命题6.3.4以后，只要对 $f\in D_{(p,q+1)}(G)$ 来证明不等式（1）就行了.

现在来看，能否找到 φ_1，φ_2，φ_3，使得命题6.3.4中的条件（7）成立.

对于给定的 $x\in G$，总能有紧集 $K\subset G$，使得 $x\in K$，故当 $k>k_0$ 时，$\eta_k(x)\equiv 1$ 在 K 上成立，于是 $\frac{\partial\eta_k(x)}{\partial\bar{z}_l}=0$. 因此

$$\psi_1(x)=\sup\left\{\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial\eta_1(x)}{\partial\bar{z}_l}\right|^2,\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial\eta_2(x)}{\partial\bar{z}_l}\right|^2,\cdots\right\}$$

在 G 上有定义且取正值. 命 $\psi(x)=\log\psi_1(x)$，于是

$$\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial\eta_k(x)}{\partial\bar{z}_l}\right|^2\leqslant\psi_1(x)=e^{\psi(x)}.$$

对于任意的 $\varphi\in C^2(G)$，命

$$\varphi_1=\varphi-2\psi,\varphi_2=\varphi-\psi,\varphi_3=\varphi,$$

我们有

$$e^{-\varphi_2}\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial\eta_k}{\partial\bar{z}_l}\right|^2\leqslant e^{-\varphi_2}e^{\psi}=e^{-\varphi+2\psi}=e^{-\varphi_1};$$

$$e^{-\varphi_3}\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial\eta_k}{\partial\bar{z}_l}\right|^2\leqslant e^{-\varphi_3}e^{\psi}=e^{-(\varphi-\psi)}=e^{-\varphi_2},$$

即条件（7）成立.

现在可以证明

命题6.3.5 设 φ，ψ 及 φ_1，φ_2，φ_3如上所述. 如果对 $w\in\mathbf{C}^n$，有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}w_j\bar{w}_k\geqslant 2(|\bar\partial\psi|^2+e^{\psi})\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2,\tag{12}$$

那么对任意 $f\in D_{(p,q+1)}(G)$，便有

$$\|f\|^2_{\varphi_2}\leqslant\|T^*f\|^2_{\varphi_1}+\|Sf\|^2_{\varphi_3}.$$

在证明命题6.3.5之前，先证明

引理6.3.6 设 $f=\sum\limits_{|I|=p}\sum\limits_{|J|=q+1}f_{IJ}dz_I\wedge d\bar{z}_J$，那么

$$|\bar\partial f|^2=\sum_{I,J}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{IJ}}{\partial\bar{z}_j}\right|^2-\sum_{I,K}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial f_{I,jK}}{\partial\bar{z}_k}\cdot\overline{\frac{\partial f_{I,kK}}{\partial\bar{z}_j}},$$

这里 $|K|=q$.

证 因为

$$\begin{aligned}\bar\partial f&=\sum_{|I|=p}\sum_{|J|=q+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{IJ}}{\partial\bar{z}_j}d\bar{z}_j\wedge dz_I\wedge d\bar{z}_J\\&=(-1)^p\sum_{|I|=p}\sum_{|J|=q+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{IJ}}{\partial\bar{z}_j}dz_I\wedge d\bar{z}_j\wedge d\bar{z}_J,\end{aligned}$$

这里 I，J 分别是 p 个数字和 $q+1$个数字的增排列，但 jJ 就不一定是增排列了. 因此不能写 $|\bar\partial f|^2=\sum\limits_{I,J}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{IJ}}{\partial\bar{z}_j}\right|^2$，还必须从此式

减去那些因 jJ 不是增排列而产生的项. 为此，把 $|\bar{\partial} f|^2$ 写成一般形式

$$|\bar{\partial} f|^2 = \sum_{I,J,L} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{IL}}{\partial \bar{z}_l}} \varepsilon_{lL}^{jJ}. \tag{13}$$

显然，如果 $j \in J$ 或 $l \in L$，则 $\varepsilon_{lL}^{jJ} = 0$；如果 $\{j\} \cup J \neq \{l\} \cup L$，则也有 $\varepsilon_{lL}^{jJ} = 0$. 所以在下面的讨论中，排除这三种情况.

如果 jJ 和 lL 作为 $q+2$ 个数字的排列，它们的奇偶性不同，这意味着当 jJ 和 lL 都排成增排列时，$d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_J$ 和 $d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_L$ 的符号不同，因而 $\varepsilon_{lL}^{jJ} = -1$. 反之，则 $\varepsilon_{lL}^{jJ} = 1$. 实际上，$\varepsilon_{lL}^{jJ}$ 就是置换 $\begin{pmatrix} jJ \\ lL \end{pmatrix}$ 的符号. 现在仔细研究 (13) 中的项. 首先考虑 $j=l$ 的项，这时必有 $J=L$，$j \notin J$ 和 $l \notin L$，于是 $\varepsilon_{lL}^{jJ} = 1$，故 (13) 中相应的项为

$$\sum_{I,J} \sum_{j \notin J} \left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2.$$

再考虑 $j \neq l$ 的项，因为 $\varepsilon_{lL}^{jJ} \neq 0$，故必有 $l \in J$，$j \in L$，但由于 $\{j\} \cup J = \{l\} \cup L$，故从 J 中去掉 l 和从 L 中去掉 j 所剩下的 q 个数字的集合 K 和 K' 完全相同. 由于

$$\varepsilon_{lL}^{jJ} = \varepsilon_{jlK}^{jJ} \varepsilon_{ljK}^{jlK} \varepsilon_{lL}^{ljK} = -\varepsilon_{lK}^{J} \varepsilon_{L}^{jK},$$

所以对应于 $j \neq l$ 的项是

$$-\sum_{I,J,L} \sum_{j \neq l} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{IL}}{\partial \bar{z}_l}} \varepsilon_{lK}^{J} \varepsilon_{L}^{jK}$$

$$= -\sum_{I,K} \sum_{j \neq l} \frac{\partial f_{I,lK}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar{z}_l}}.$$

于是

$$|\bar{\partial} f|^2 = \sum_{I,J} \sum_{j \notin J} \left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 - \sum_{I,K} \sum_{j \neq l} \frac{\partial f_{I,lK}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar{z}_l}}$$

$$= \sum_{I,J} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 - \sum_{I,K} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial f_{I,lK}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar{z}_l}}. \square$$

引理6.3.7 设 $\varphi \in C^2(G)$ 是一个取实值的函数，记

$$\delta_j w = e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial z_j}(w e^{-\varphi}) = \frac{\partial w}{\partial z_j} - w \frac{\partial \varphi}{\partial z_j},$$

那么 (i) 若 u，$v \in C_0^{\infty}(G)$，则

$$\int_G u \overline{\frac{\partial v}{\partial \bar{z}_j}} e^{-\varphi} dm = - \int_G (\delta_j u) \bar{v} e^{-\varphi} dm.$$

(ii) 若 $w_j \in C_0^{\infty}(G)$，$j=1$，…，n，则

$$\sum_{j,k=1}^{n} \int_G \left\{ (\delta_j w_j) \overline{(\delta_k w_k)} - \frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}_k} \overline{\frac{\partial w_k}{\partial \bar{z}_j}} \right\} e^{-\varphi} dm$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \int_G w_j \bar{w}_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} e^{-\varphi} dm.$$

证 (i) 由于 u，v 在 G 中有紧支集，由分部积分法，

$$\begin{aligned}
&\int_G u \overline{\frac{\partial v}{\partial \bar{z}_j}} e^{-\varphi} dm \\
&= \int_G u \frac{\partial \bar{v}}{\partial z_j} e^{-\varphi} dm \\
&= - \int_G \bar{v} \frac{\partial}{\partial z_j}(u e^{-\varphi}) dm \\
&= - \int_G (\delta_j u) \bar{v} e^{-\varphi} dm.
\end{aligned}$$

(ii) 由直接验算可得

$$\left(\delta_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \delta_k \right) w_k = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar{z}_j} w_k,$$

即

$$- \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \delta_k w_k = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar{z}_j} w_k - \delta_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} w_k.$$

现在 (i) 中取 $u = w_j$，$v = \delta_k w_k$，那么

$$\int_G (\delta_j w_j)\,\overline{(\delta_k w_k)}\,e^{-\varphi}dm = -\int_G w_j\,\overline{\frac{\partial}{\partial \bar z_j}(\delta_k w_k)}\,e^{-\varphi}dm$$

$$= \int_G w_j \bar w_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_j} e^{-\varphi}dm - \int_G w_j\,\overline{\delta_k \frac{\partial w_k}{\partial \bar z_j}}\,e^{-\varphi}dm,$$

因而

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=1}^{n} \int_G (\delta_j w_j)\,\overline{(\delta_k w_k)}\,e^{-\varphi}dm \\
&\quad = \sum_{j,k=1}^{n} \int_G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_j} w_j \bar w_k e^{-\varphi}dm \\
&\quad - \sum_{j,k=1}^{n} \int_G w_k\,\overline{\delta_j \frac{\partial w_j}{\partial \bar z_k}}\,e^{-\varphi}dm,
\end{aligned} \tag{14}$$

这里我们已经把上式右端第二项求和指标 j，k 作了调换. 另一方面，再在 (i) 中取 $u=\frac{\partial w_j}{\partial \bar z_k}$，$v=w_k$，有

$$\begin{aligned}
&\int_G \frac{\partial w_j}{\partial \bar z_k}\,\overline{\frac{\partial w_k}{\partial \bar z_j}}\,e^{-\varphi}dm \\
&\quad = -\int_G \delta_j \frac{\partial w_j}{\partial \bar z_k} \bar w_k e^{-\varphi}dm,
\end{aligned}$$

取共轭并对 j，k 求和得

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j,k=1}^{n} \int_G w_k\,\overline{\delta_j \frac{\partial w_j}{\partial \bar z_k}}\,e^{-\varphi}dm \\
&\quad = \sum_{j,k=1}^{n} \int_G \overline{\frac{\partial w_j}{\partial \bar z_k}}\,\frac{\partial w_k}{\partial \bar z_j} e^{-\varphi}dm \\
&\quad = \sum_{j,k=1}^{n} \int_G \frac{\partial w_j}{\partial \bar z_k}\,\overline{\frac{\partial w_k}{\partial \bar z_j}}\,e^{-\varphi}dm.
\end{aligned}$$

从 (14) 减去上式，即得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=1}^{n} \int_G \left\{ (\delta_j w_j)\,\overline{(\delta_k w_k)} - \frac{\partial w_j}{\partial \bar z_k}\,\overline{\frac{\partial w_k}{\partial \bar z_j}} \right\} e^{-\varphi}dm \\
&\quad = \sum_{j,k=1}^{n} \int_G w_j \bar w_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_j} e^{-\varphi}dm. \ \square
\end{aligned}$$

命题6.3.5的证明

由引理6.3.3的（5），T^*f 可以表示为

$$e^{\varphi_2-\varphi_1}T^*f=(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}f_{I,jK}-f_{I,jK}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_j}\right)dz_I\wedge d\bar{z}_K.$$

注意到 $\psi=\varphi_2-\varphi_1$，$\varphi_2=\varphi-\psi$ 以及 $\delta_j w=\frac{\partial w}{\partial z_j}-w\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}$，上式可写为

$$e^{\psi}T^*f=(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}\delta_j f_{I,jK}dz_I\wedge d\bar{z}_K$$

$$+(-1)^{p-1}\sum_{I,K}\sum_{j=1}^{n}f_{I,jK}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}dz_I\wedge d\bar{z}_K,$$ 把右端两项分别简记为 X 和 Y，上式可简写为

$$e^{-\psi}X=T^*f-e^{-\psi}Y.$$

因而得

$$\begin{aligned}\|e^{-\psi}X\|_{\varphi_1}^2&\leqslant(\|T^*f\|_{\varphi_1}+\|e^{-\psi}Y\|_{\varphi_1})^2\\&\leqslant 2\|T^*f\|_{\varphi_1}^2+2\|e^{-\psi}Y\|_{\varphi_1}^2\end{aligned}\tag{15}$$

从 X，Y 的表达式得知

$$\begin{aligned}\|e^{-\psi}X\|_{\varphi_1}^2&=\int_G\sum_{I,K}\left|\sum_{j=1}^{n}\delta_j f_{I,jK}\right|^2e^{-2\psi}e^{-\varphi_1}dm\\&=\int_G\sum_{I,K}\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_j f_{I,jK})\overline{(\delta_k f_{I,kK})}e^{-\varphi}dm,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|e^{-\psi}Y\|_{\varphi_1}^2&=\int_G\sum_{I,K}\left|\sum_{j=1}^{n}f_{I,jK}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}\right|^2e^{-\varphi}dm\\&\leqslant\int_G\sum_{I,K}\left\{\sum_{j=1}^{n}|f_{I,jK}|^2\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\psi}{\partial z_j}\right|^2\right\}e^{-\varphi}dm\\&\leqslant\int_G|f|^2|\partial\psi|^2e^{-\varphi}dm.\end{aligned}$$

代入（15）得

$$\int_G\sum_{I,K}\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_j f_{I,jK})\overline{(\delta_k f_{I,kK})}e^{-\varphi}dm$$

$$\leqslant 2\|T^* f\|_{\varphi_1}^2 + 2\int_G |f|^2 |\partial\psi|^2 e^{-\varphi} dm.$$

把引理6.3.6中$|\bar{\partial} f|^2$表达式的两端在G上积分并分别加在上面不等式的两端得

$$\int_G \sum_{I,K} \sum_{j,k=1}^n \left\{ (\delta_j f_{I,jK}) \overline{(\delta_k f_{I,kK})} - \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar{z}_k} \overline{\frac{\partial f_{I,kK}}{\partial \bar{z}_j}} \right\} e^{-\varphi} dm$$

$$+ \int_G \sum_{I,J} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 e^{-\varphi} dm$$

$$\leqslant 2\|T^* f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2$$

$$+ 2\int_G |f|^2 |\partial\psi|^2 e^{-\varphi} dm.$$

在引理6.3.7（ii）中取$w_j = f_{I,jK}$，上式便可写为

$$\sum_{I,K} \int_G \sum_{j,k=1}^n f_{I,jK} \bar{f}_{I,kK} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} e^{-\varphi} dm$$

$$+ \sum_{I,J}' \sum_{j=1}^n \int_G \left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 e^{-\varphi} dm$$

$$\leqslant 2\|T^* f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2$$

$$+ 2\int_G |f|^2 |\partial\psi|^2 e^{-\varphi} dm. \tag{16}$$

根据命题6.3.5的条件（12），

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} f_{I,jK} \bar{f}_{I,kK}$$

$$\geqslant 2(|\bar{\partial}\psi|^2 + e^{\psi}) \sum_{j=1}^n |f_{I,jK}|^2,$$

因而有

$$2\|T^* f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2$$

$$+ 2\int_G |f|^2 |\bar{\partial}\psi|^2 e^{-\varphi} dm$$

$$\geqslant \sum_{I,K} \int_G 2(|\bar{\partial}\psi|^2 + e^{\psi}) \sum_{j=1}^n |f_{I,jK}|^2 e^{-\varphi} dm$$

$$+ \sum_{I,J} \sum_{j=1}^n \int_G \left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 e^{-\varphi} dm$$

$$= 2\int_G |f|^2 |\bar{\partial}\psi|^2 e^{-\varphi} dm + 2\|f\|^2_{\varphi_2}$$

$$+ \sum_{I,J} \sum_{j=1}^n \int_G \left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 e^{-\varphi} dm$$

$$\geqslant 2\int_G |f|^2 |\bar{\partial}\psi|^2 e^{-\varphi} dm + 2\|f\|^2_{\varphi_2}.$$

由此即得

$$\|f\|^2_{\varphi_2} \leqslant \|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3}.$$

这就是要证明的不等式. □

6.3.3 $\bar{\partial}$问题在拟凸域上有解

有了这些准备之后，便可证明我们的主要定理.

定理6.3.8 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域. 如果 $f \in L^2_{(p,q+1)}$ $(G,$ loc) 且满足 $\bar{\partial} f = 0$，那么方程 $\bar{\partial} u = f$ 有一个解 $u \in L^2_{(p,q)}(G,\text{loc})$.

证明之前先解释记号 $L^2_{(p,q)}(G,\ \text{loc})$. 定义

$$L^2(G,\text{loc}) = \left\{ f: \text{对每个 } K \subset\subset G, \int_K |f|^2 dm < \infty \right\}.$$

$L^2(G,\text{loc})$中的元素称为局部平方可积函数. 显然 $L^2(G,\varphi) \subset L^2(G,\text{loc})$. 因对任何 $f \in L^2(G,\varphi)$，取 $K \subset\subset G$，则在 K 上有 $|\varphi| \leqslant M$，于是

$$\int_K |f|^2 dm \leqslant e^M \int_K |f|^2 e^{-\varphi} dm$$

$$\leqslant e^M \int_G |f|^2 e^{-\varphi} dm < \infty,$$

即 $f \in L^2(G,\text{loc})$. 弄清了 $L^2(G,\text{loc})$的意义以后，$L^2_{(p,q)}(G,\text{loc})$的意义自然就明白了.

定理6.3.8的证明 根据定理5.5.10，在拟凸域 G 上存在强

多重次调和穷竭函数 $\eta\in C^{\infty}(G)$. 因而对任意实数 t，有

$$K_t=\{z\in G:\eta(z)\leqslant t\}\subset\subset G$$

因为 η 是强多重次调和函数，故对任意 $z\in G$ 及 $\xi\in\mathbf{C}^n$，有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\eta(z)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\xi_j\bar{\xi}_k>0.$$

对于取定的 $z\in G$，该二次型在单位球面上的最小值设为 $m(z)>0$. 于是，有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\eta(z)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant m(z)\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2.$$

如命题6.3.5那样取定 ψ，命

$$h(t)=\sup_{K_t}2\frac{|\bar{\partial}\psi|^2+e^{\psi(z)}}{m(z)},$$

因为 K_t 是紧的，故 $h(t)$ 有限且是 t 的单调增加的连续函数. 今取 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g\in C^{\infty}(\mathbf{R})$, g 是递增的凸函数, $g'\geqslant 0$, $g''>0$ 且 $g'\geqslant h$. 现在命 $\varphi(z)=g(\eta(z))$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}w_j\bar{w}_k&=g''(\eta(z))\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\eta}{\partial z_j}w_j\right|^2\\&\quad+g'(\eta(z))\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\eta}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}w_j\bar{w}_k\\&\geqslant g'(\eta(z))\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\eta}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}w_j\bar{w}_k\\&\geqslant g'(\eta(z))m(z)\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2.\end{aligned}$$

对于取定的 z，设 $\eta(z)=t$，于是

$$g'(\eta(z))=g'(t)\geqslant h(t)\geqslant 2\frac{|\bar{\partial}\psi|^2+e^{\psi(z)}}{m(z)},$$

代入上式即得

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}w_j\bar{w}_k$$

$$\geqslant 2(|\bar{\partial}\psi|^2 + e^{\psi})\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2.$$

此式说明这样选取的 φ 满足命题6.3.5的条件（12）.

另一方面，因为 $f\in L^2_{(p,q+1)}$（G，loc），对于任何 j，积分 $\int_{K_{j+1}-K_j}|f|^2dm=b_j$ 是有限数，适当选取 δ_j，使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}b_j\delta_j<\infty.$$

现在要求上面选取的 g 还满足：

$$g(t)\geqslant\log\frac{1}{\delta_j}+\sup\{\psi(z):z\in K_{j+1}-K_j\},$$

$$j<t\leqslant j+1.$$

这样，当 $z\in K_{j+1}-K_j$ 时，$j<\eta(z)\leqslant j+1$，因而

$$\varphi(z)=g(\eta(z))\geqslant\log\frac{1}{\delta_j}+\psi(z),$$

即

$$e^{-(\varphi-\psi)}\leqslant\delta_j,(z\in K_{j+1}-K_j).$$

于是

$$\|f\|^2_{\varphi_2}=\int_G|f|^2e^{-(\varphi-\psi)}dm$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{K_{j+1}-K_j}|f|^2e^{-(\varphi-\psi)}dm$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}b_j\delta_j<\infty.$$

即 $f\in L^2_{(p,q+1)}$（G，φ_2），因而 $\bar{\partial}u=f$ 有解

$$u\in L^2_{(p,q)}(G,\varphi_1)\subset L^2_{(p,q)}(G,\text{loc}).\ \square$$

§6.4 $\bar{\partial}$问题解的正则性

上面我们已经证明了，如果G是$\mathbf{C}^n$中的拟凸域，当$f\in$

$L^2_{(p,q+1)}(G, \text{loc})$，$\bar\partial f=0$ 时，$\bar\partial u=f$ 有一个解 u，而且 $u\in L^2_{(p,q)}(G,\text{loc})$．我们自然希望，当 f 有足够的可微性时，解 u 也有相应的可微性，但情况并不一定如此．

例如设 $G=B_2$，即 $\mathbf{C}^2$ 中的单位球．命

$$f=2(\bar z_1+\bar z_2)d\bar z_1\wedge d\bar z_2.$$

它是一个具有 C^∞ 系数的（0，2）形式，命

$$h_1(z)=\begin{cases}0, & \mathrm{Re}z_2\leqslant 0,\\ 1, & \mathrm{Re}z_2>0,\end{cases}$$

$$h_2(z)=\begin{cases}0, & \mathrm{Re}z_1\leqslant 0,\\ 1, & \mathrm{Re}z_1>0.\end{cases}$$

$$u(z)=\left(h_1\frac{\partial h_2}{\partial \bar z_1}-\bar z_2^2\right)d\bar z_1+\left(h_2\frac{\partial h_1}{\partial \bar z_2}+\bar z_1^2\right)d\bar z_2.$$

通过直接计算易得 $\bar\partial u=f$，即 u 是 $\bar\partial u=f$ 的一个解，但这个解却是不连续的．另一方面，容易看出

$$v=-\bar z_2^2d\bar z_1+\bar z_1^2d\bar z_2$$

也满足 $\bar\partial v=f$，而这个解的系数都是属于 C^∞ 的．

这个例子说明，当 f 有足够的可微性时，方程 $\bar\partial u=f$ 的许多解中，既有性质良好的解，也有性质不好的解．我们的任务是要设法找出那些性质良好的解．

6.4.1 $\mathbf{C}^n$ 中的 Sobolev 空间

这一节的主要工具是 Sobolev 空间的理论．在 §6.1中，我们曾在 $\mathbf{R}^N$ 的开集上引入 Sobolev 空间的概念．把 $\mathbf{C}^n$ 看成 $\mathbf{R}^{2n}$，§6.1 中建立的 Sobolev 空间的理论在 $\mathbf{C}^n$ 中仍然有效．但是那里的微分算子 $D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$ 现在应改成

$$D_z^\alpha D_{\bar z}^\beta=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \bar z_1^{\beta_1}\cdots\partial \bar z_n^{\beta_n}}$$

这里 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$都是多重指标. 这时 Sobolev 空间可定义为

定义6.4.1 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，s 是非负整数. G 上的 s 阶 Sobolev 空间 $W^s(G)$是所有这样的函数 f 构成的集合：对所有满足$|\alpha|+|\beta|\leqslant s$ 的 α,β，它的弱导数 $D_z^\alpha D_{\bar z}^\beta f\in L^2(G)$.

若在这空间中引进如下的范数

$$\|f\|_s^2=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant s}\|D_z^\alpha D_{\bar z}^\beta f\|_{L^2}^2,$$

则 $W^s(G)$ 成为 Banach 空间.

若引进如下的内积

$$\langle f,g\rangle_s=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant s}\int_G(D_z^\alpha D_{\bar z}^\beta f)\,\overline{(D_z^\alpha D_{\bar z}^\beta g)}\,dm,$$

则 $W^s(G)$ 成为 Hilbert 空间.

定义6.4.2 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，s 是非负整数. G 上的 s 阶 (p,q) 形式的 Soholev 空间定义为

$$W^s_{(p,q)}(G)=\Big\{f=\sum_{|I|=p}\sum_{|J|=q}f_{IJ}dz_I\wedge d\bar z_J: f_{IJ}\in W^s(G)\Big\},$$

它的范数定义为

$$\|f\|_s^2=\sum_{|I|=p}\sum_{|J|=q}\|f_{IJ}\|_s^2.$$

自然定义下面的

$$W^s(G,\mathrm{loc})=\{f: D_z^\alpha D_{\bar z}^\beta f\in L^2(G,\mathrm{loc}),|\alpha|+|\beta|\leqslant s\},$$

$$W^s_{(p,q)}(G,\mathrm{loc})=\Big\{f=\sum_{|I|=p}\sum_{|J|=q}f_{IJ}dz_I\wedge d\bar z_J: f_{IJ}\in W^s(G,\mathrm{loc})\Big\}.$$

我们需要下面的

命题6.4.3 如果 $f\in L^2(\mathbf{C}^n)$具有紧支集，且$\dfrac{\partial f}{\partial \bar z_j}\in L^2(\mathbf{C}^n)$，$j=$

$1,\cdots,n$，那么 $f\in W^1(\mathbf{C}^n)$.

证 按照 $W^1(\mathbf{C}^n)$的定义，只要证明，对所有的 $j=1,\cdots,n$，有 $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}\in L^2(\mathbf{C}^n)$就行了. 先设 $f\in C_0^\infty(\mathbf{C}^n)$，由分部积分法即得

$$\int_{\mathbf{C}^n}\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right|^2 dm=\int_{\mathbf{C}^n}\frac{\partial f}{\partial z_j}\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}dm$$
$$=-\int_{\mathbf{C}^n}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j\partial z_j}\bar{f}dm=\int_{\mathbf{C}^n}\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right|^2 dm<\infty.$$

对于一般的具有紧支集的 $f\in L^2(\mathbf{C}^n)$，用 § 6.1的函数光滑化的方法，作 $f_\varepsilon=f*\chi_\varepsilon$. 因为 f 具有紧支集，所以 $f_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbf{C}^n)$，且 $\|f_\varepsilon-f\|_{L^2}\to 0$（当 $\varepsilon\to 0$）. 从$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\in L^2(\mathbf{C}^n)$可得$\dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}_j}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right)_\varepsilon\in L^2(\mathbf{C}^n)$，因而由上面所证，即知$\dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial z_j}\in L^2(\mathbf{C}^n)$，所以$\left(\dfrac{\partial f}{\partial z_j}\right)_\varepsilon\in L^2(\mathbf{C}^n)$. 由于当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\left(\dfrac{\partial f}{\partial z_j}\right)_\varepsilon$ 在 L^2 中收敛于 $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$，因而 $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}\in L^2(\mathbf{C}^n)$ 对所有 $j=1,\cdots,n$ 成立. □

命题6.4.4 设 $f=\sum\limits_{I,J}f_{IJ}dz_I\wedge d\bar{z}_J\in L^2_{(p,q+1)}(\mathbf{C}^n)$具有紧支集. 如果 $\bar{\partial}f\in L^2_{(p,q+2)}(\mathbf{C}^n)$，$\theta f\in L^2_{(p,q)}(\mathbf{C}^n)$，这里 $\theta f=(-1)^{p-1}\cdot\sum\limits_{\substack{|I|=p\\|K|=q}}\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{\partial f_{I,jK}}{\partial z_j}dz_I\wedge d\bar{z}_K$ 如命题6.3.4的证明中所示，那么 $f\in W^1_{(p,q+1)}(\mathbf{C}^n)$.

证 和证明命题6.4.3的方法一样. 先设 $f\in D_{(p,q+1)}(\mathbf{C}^n)$. 注意到 § 6.3的 (16) 对任意的 φ和 ψ 都是成立的，现取 $\varphi=\psi=0$，这时 $\varphi_1=\varphi-2\psi=0$，$\varphi_2=\varphi-\psi=0$，$\varphi_3=\varphi=0$. 于是 (16) 变成

$$\sum_{I,J}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbf{C}^n}\left|\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j}\right|^2 dm$$
$$\leqslant 2\|T^*f\|^2_{L^2}+\|Sf\|^2_{L^2}.$$

这时 T^*f 可以表示为

$$T^* f = (-1)^{p-1} \sum_{\substack{|I|=p \\ |K|=q}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial z_j} dz_I \wedge d\bar{z}_K = \theta f,$$

故上式可写为

$$\sum_{I,J} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbf{C}^n} \left| \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 dm$$

$$\leqslant 2\|\theta f\|_{L^2}^2 + \|\bar{\partial} f\|_{L^2}^2 < \infty,$$

由此得 $\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \in L^2(\mathbf{C}^n)$. 由命题6.4.3得 $f_{IJ} \in W^1(\mathbf{C}^n)$,因而 $f \in W^1_{(p,q+1)}(\mathbf{C}^n)$. 对于一般的具有紧支集的 $f \in L^2_{(p,q+1)}(\mathbf{C}^n)$,和命题6.4.3的证法一样,用光滑化的方法即可得证. □

6.4.2 内部正则性定理

现在可以证明

定理6.4.5 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域,s 是非负整数. 如果 $f \in W^s_{(p,q+1)}(G,\mathrm{loc})$,且 $\bar{\partial} f = 0$,那么

(i)如果 $q \geqslant 1$,那么方程 $\bar{\partial} u = f$ 的标准解 $u \in W^{s+1}_{(p,q)}(G,\mathrm{loc})$;

(ii)如果 $q = 0$,那么方程 $\bar{\partial} u = f$ 的任意解 $u \in W^{s+1}_{(p,0)}(G,\mathrm{loc})$.

证 先证(i). 设 $q \geqslant 1$. 从定理6.3.8、命题6.3.5和定理6.2.5知道方程 $\bar{\partial} u = f$ 存在标准解 u(标准解的定义见定义6.2.6). 现在证明这个标准解 u 还满足 $\theta(e^{-\varphi_1} u) = 0$,这里 θ 是命题6.4.4中提到的算子. 事实上,因为 u 是标准解,所以存在 $v \in D(T^*)$,使得 $u = T^* v$. 于是

$$e^{-\varphi_1} T^* v = (-1)^{p-1} \sum_{I,K} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} (e^{-\varphi_2} v_{I,jK}) dz_I \wedge d\bar{z}_K$$

$$= \theta(e^{-\varphi_2} v).$$

从直接验算可得 $\theta^2 = 0$,因而

$$\theta(e^{-\varphi_1} u) = \theta(e^{-\varphi_1} T^* v) = \theta^2(e^{-\varphi_2} v) = 0.$$

另一方面,

$$\theta(e^{-\varphi_1}u)=(-1)^{p-1}\sum_{I,L}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-\varphi_1}u_{I,jL})dz_I\wedge d\bar{z}_L$$

$$=(-1)^{p-1}\sum_{I,L}\sum_{j=1}^{n}\Big(-e^{-\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_j}u_{I,jL}$$

$$+e^{-\varphi_1}\frac{\partial u_{I,jL}}{\partial z_j}\Big)dz_I\wedge d\bar{z}_L$$

$$=e^{-\varphi_1}\theta u-e^{-\varphi_1}bu,$$

这里

$$bu=(-1)^{p-1}\sum_{I,L}\sum_{j=1}^{n}u_{I,jL}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_j}dz_I\wedge d\bar{z}_L,$$

$$|L|=q-1.$$

由此得 $\theta u=bu$,这里 b 是一个系数属于 C^∞ 的零阶微分算子. 现在假定对某个 $m(0\leqslant m\leqslant s)$证明了

$$u\in W^m_{(p,q)}(G,\mathrm{loc}),$$

至少 $m=0$时这个假定是成立的. 任取 $\chi\in C_0^\infty(G)$,则

$$\bar{\partial}(\chi u)=(\bar{\partial}\chi)\wedge u+\chi\bar{\partial}u=(\bar{\partial}\chi)\wedge u+\chi f\in W^m_{(p,q+1)}(G,\mathrm{loc}).$$

这里我们已经用了 $f\in W^s_{(p,q+1)}(G,\mathrm{loc})$的假定. 因为 $\theta u=bu$,所以 $\theta(\chi u)\in W^m_{(p,q-1)}(G,\mathrm{loc})$. 现在设多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,满足$|\alpha|+|\beta|\leqslant m$,按照 Sobolev 空间的定义有

$$\bar{\partial}(D_z^\alpha D_{\bar{z}}^\beta(\chi u))=D_z^\alpha D_{\bar{z}}^\beta(\bar{\partial}(\chi u))\in L^2_{(p,q+1)}(G),$$

$$\theta(D_z^\alpha D_{\bar{z}}^\beta(\chi u))=D_z^\alpha D_{\bar{z}}^\beta(\theta(\chi u))\in L^2_{(p,q-1)}(G).$$

于是,由命题6.4.4得 $D_z^\alpha D_{\bar{z}}^\beta(\chi u)\in W^1_{(p,q)}(G)$,因而$\chi u\in W^{m+1}_{(p,q)}(G)$,所以 $u\in W^{m+1}_{(p,q)}(G,\mathrm{loc})$. 这样,我们从 $u\in W^m_{(p,q)}(G,\mathrm{loc})$推出了 $u\in W^{m+1}_{(p,q)}(G,\mathrm{loc})$. 继续做下去,即得 $u\in W^{s+1}_{(p,q)}(G,\mathrm{loc})$.

(ii) 设 $q=0$. 设 $u=\sum_I u_I dz_I$ 是 $\bar{\partial}u=f$ 的任意一个解. 于是 $f\in W^s_{(p,1)}(G,\mathrm{loc})$意味着$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_j}=f_{I,j}\in W^s(G,\mathrm{loc})$. 和上面一样,假定对某个 $m(0\leqslant m\leqslant s)$已经证明了 $u\in W^m_{(p,0)}(G,\mathrm{loc})$. 取 $\chi\in C_0^\infty(G)$,则

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(\chi u_I)=\chi f_{I,j}+\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_j}u_I\in W^m(G).$$

下面的讨论和(i)中完全一样，但只要用命题6.4.3就行了. □

这一节的主要结果是下面的

定理6.4.6 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域. 如果 $f\in C^{\infty}_{(p,q+1)}(G)$ 且 $\bar{\partial}f=0$，那么存在 $u\in C^{\infty}_{(p,q)}(G)$，使得 $\bar{\partial}u=f$ 成立.

证 定理6.1.7(Sobolev 引理)现在可以写成 $W^{s+2n+1}_{(p,q)}(G)\subset C^s_{(p,q)}(G)$，又因可微分性是一个局部性质，因而又可写成

$$W^{s+2n+1}_{(p,q)}(G,\mathrm{loc})\subset C^s_{(p,q)}(G). \tag{1}$$

于是，由定理6.4.5和(1)即得本定理.

定理6.4.6称为内部正则性定理，在强拟凸域的情形，Kohn 得到更强的结果.

定理6.4.7 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2边界的有界强拟凸域. 如果 $f\in C^{\infty}_{(p,q+1)}(\overline{G})$ 且 $\bar{\partial}f=0$，那么存在 $u\in C^{\infty}_{(p,q)}(\overline{G})$，使得 $\bar{\partial}u=f$ 成立.

这个定理在 § 6.7中要用到，它的证明就不在这里讲了.

§ 6.5 Levi 问 题

作为 $\bar{\partial}$ 问题的第一个应用，我们证明 Levi 猜测：拟凸域一定是全纯域.

我们从一个全纯开拓问题谈起. 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，命 $E=\{z\in G: z_n=0\}$，那么 E 可以看成 $\mathbf{C}^{n-1}$中的一个集合. 设 f 是 E 上的全纯函数，问是否存在 $F\in H(G)$，使得 $F|_E=f$? 从下面的例子可以看出，一般来说，这样的 F 是不存在的.

例6.5.1 设$G=B(0,1)-\overline{B}(0,\frac{1}{2})\subset\mathbf{C}^2$，即 $G=\left\{z\in\mathbf{C}^2:\frac{1}{4}<|z_1|^2+|z_2|^2<1\right\}$，所以 $E=\left\{(z_1,0):\frac{1}{2}<|z_1|<1\right\}$. 命 $f:E$

$\to \mathbf{C}$ 为 $f(z_1,0)=\dfrac{1}{z_1-\dfrac{1}{2}}$，当然 $f\in H(E)$. 如果存在 $F\in H(G)$，使得 $F|_E=f$，那么由推论1.3.6知道，F 是单位球 $B(0,1)$ 上的全纯函数，因而在点 $(\frac{1}{2},0)$ 的任一邻域中有界，这和 $F|_E=f$ 相矛盾. 这就是说 f 的全纯开拓 F 是不存在的.

但对拟凸域，这样的全纯开拓是存在的.

引理6.5.2 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域，命

$E=\{z\in G: z_n=0\}$，$\check{E}=\{(z_1,\cdots,z_{n-1})\in \mathbf{C}^{n-1}:(z_1,\cdots,z_{n-1},0)\in E\}$，如果作为 $(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 的函数 $f(z_1,\cdots,z_{n-1},0)$ 在 $\check{E}$ 上全纯，则必存在全纯函数 $F:G\to\mathbf{C}$，使得 $F|_E=f$.

证 记 $\pi(z_1,\cdots,z_n)=(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 为 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^{n-1}$ 的射影，$H=\{z\in G:\pi z\notin \check{E}\}$. 那么 E 和 H 是 G 的不相交的闭子集. 作 E 的邻域 V_1,V_2，使得 $E\subset V_1\subset V_2$，且 $V_2\cap H=\varnothing$. 虽然 E 不一定是 G 中的紧子集，但用证明推论4.6.6的方法，仍然可以证明，存在 C^∞ 函数 $\varphi:G\to[0,1]$，使得 $\mathrm{supp}\varphi\subset V_2$，且在 V_1 上有 $\varphi(z)\equiv 1$. 定义 G 上的 $(0,1)$ 形式

$$g=\begin{cases}\dfrac{(-\bar{\partial}\varphi(z))f(\pi(z),0)}{z_n}, & z\in G-E,\\ 0, & z\in E.\end{cases} \tag{1}$$

因为 $\bar{\partial}\varphi=0$ 在 V_1 上成立，所以 g 是属于 C^∞ 的 $(0,1)$ 形式. 由于 f 全纯，且 $\bar{\partial}^2=0$，所以 $\bar{\partial}g=0$. 于是，由定理6.4.6知，$\bar{\partial}$ 方程 $\bar{\partial}u=g$ 有解 $u\in C^\infty(G)$. 用这个 u 构造函数

$$F(z)=\varphi(z)f(\pi(z),0)+z_nu(z),$$

则 $\bar{\partial}F=0$，即 $F\in H(G)$，且 $F|_E=f$. □

现在证明 Levi 猜测.

定理6.5.3 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域，那么 G 一定是全纯域.

证 对空间的维数用归纳法. 因为 $\mathbf{C}$ 上任意域都是全纯域，

所以 $n=1$ 时定理成立. 今设定理对 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中的拟凸域成立. 任取 $a\in\partial G$, 适当选取 $b\in\mathbf{C}^n$, 作

$$H=\left\{z\in\mathbf{C}^n: \sum_{j=1}^{n}(z_j-a_j)b_j=0\right\},$$

使得 $a\in\partial(G\cap H)$. 作坐标变换

$$w_j=z_j-a_j, j=1,\cdots,n-1; w_n=\sum_{j=1}^{n}(z_j-a_j)b_j,$$

则 a 变为原点, H 变为 $\{w\in\mathbf{C}^n: w_n=0\}$. 命 $E=G\cap H$, 在新的坐标系下, $E=\{w\in G: w_n=0\}$. 由于 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域, 容易直接证明 E 是 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中的拟凸域, 由归纳假定, 它是 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中的全纯域, 因而存在 E 上的全纯函数 f, 它不能通过 a 点全纯开拓出去. 由引理 6.5.2, 存在 G 上的全纯函数 F, 使得 $F|_E=f$, 所以 F 不能通过 a 点全纯开拓出去, 因而 G 是全纯域. □

§6.6 Cousin 问题和除法问题

6.6.1 Cousin 问题

单复变中有两个重要的问题:

(Ⅰ)设 G 是 $\mathbf{C}$ 中的域, $a_1, a_2, \cdots$ 是一列趋于 ∂G 的点. 问是否存在 G 中的亚纯函数, 使它在 a_j 处有给定的主要部分

$$\frac{a_{j1}}{z-a_j}+\cdots+\frac{a_{jl_j}}{(z-a_j)^{l_j}}, \quad j=1,2,\cdots$$

(Ⅱ)设 G 是 $\mathbf{C}$ 中的域, $a_1, a_2, \cdots$ 是 G 中一列点, 在 G 中没有极限点. 问是否存在 G 中的全纯函数以 $\{a_k\}$ 为其零点集?

这两个问题的答案都是肯定的, 前者就是所谓的 Mittag-Leffler 定理, 后者是通过 Weiestrass 无穷乘积来解决的, 称为 Weiestrass 定理.

在多复变中, 全纯函数的零点和极点都不是孤立的, 所以这两个问题在多复变中有不同的提法.

Mittag-Leffler 定理在多复变中的推广即所谓的 Cousin 第一问题,它的提法如下:

设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域,$\{U_j\}$是 G 的一个开覆盖,在每个 U_j 上有亚纯函数 f_j,满足条件

$$f_j-f_k\in H(U_j\cap U_k).$$

问是否存在一个 G 上的亚纯函数 f,使得 $f-f_j$ 在 U_j 上是全纯函数?

Weiestrass 定理在多复变中的推广即所谓的 Cousin 第二问题,它的提法如下:

设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域,$\{U_j\}$是 G 的一个开覆盖,在每一个开集 U_j 上有一个全纯函数 f_j,满足条件 f_j/f_k 和 f_k/f_j 在 $U_j\cap U_k$ 中全纯且没有零点.问是否存在一个 G 上的全纯函数 f,使得 f_j/f 在 U_j 中全纯且没有零点?

这里要求 f_j/f 在 U_j 中没有零点且全纯,意味着 f 和 f_j 在 U_j 中有相同的零点集.

Cousin 第一问题在全纯域上永远有解,Cousin 第二问题则不然.

定理6.6.1 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯域,则 Cousin 第一问题有解.

证 我们只要能在每一个 U_i 上找到全纯函数 u_i,使得在 $U_i\cap U_j$ 上有 $f_j-f_i=u_j-u_i$,这时命

$$f=f_i-u_i, z\in U_i,$$

则 f 是 U_i 上的亚纯函数.由于当 $z\in U_i\cap U_j$ 时,$f_i-u_i=f_j-u_j$,所以 f 在 G 上有定义,f 是 G 上的亚纯函数,且当 $z\in U_i$ 时,$f-f_i=-u_i$ 是 U_i 上的全纯函数,因而 f 即为所求.为了找到满足上述条件的 u_i,记 $f_{ij}=f_j-f_i$,则由假定 f_{ij}在 $U_i\cap U_j$ 上全纯.我们先找在 U_i 上是 C^∞的函数 g_i,使得在 $U_i\cap U_j$ 上有 $f_{ij}=g_j-g_i$.为此,取

相应于$\{U_i\}$的单位分解$\{\rho_i\}$，即一组C^∞函数$\rho_i\geqslant 0$，$\mathrm{supp}\rho_i\subset U_i$且$\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i=1$. 命

$$g_j(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k(z)f_{kj}(z),z\in U_j.$$

容易看出，当$z\in U_j$时，如果$U_k\cap U_j=\varnothing$，则$\rho_k(z)=0$. 因此，上面的级数只对那些$U_k\cap U_j\neq\varnothing$的$k$求和，这时$f_{kj}$是全纯的，因而$g_j\in C^\infty(U_j)$. 如果写

$$g_j(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k(z)(f_j(z)-f_k(z))$$

$$=f_j(z)-\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k(z)f_k(z),z\in U_j,$$

那么当$z\in U_i\cap U_j$时，便有

$$g_j(z)-g_i(z)=f_j(z)-f_i(z).$$

命$\omega=\bar\partial g_i$，$z\in U_i$，由于当$z\in U_i\cap U_j$时，$\bar\partial g_j-\bar\partial g_i=\bar\partial f_{ij}=0$，即$\bar\partial g_j=\bar\partial g_i$，所以$\omega$在$G$上有定义，且$\omega\in C^\infty_{(0,1)}(G)$. 由于$G$是全纯域，即拟凸域，所以$\bar\partial$方程

$$\bar\partial u=\omega$$

在G上有解$u\in C^\infty(G)$. 今在U_i上定义$u_i=g_i-u$，因为$\bar\partial u_i=\bar\partial g_i-\bar\partial u=0$，所以$u_i\in H(U_i)$，而且

$$u_j-u_i=g_j-g_i=f_{ij}=f_j-f_i.$$

因而$f=f_i-u_i(z\in U_i)$即为所求之解. □

Cousin 第二问题在全纯域上一般是没有解的，Oka 曾经举出过使 Cousin 第二问题无解的全纯域的例子(见[Kr，p. 215]). 但我们有下面的

定理6.6.2 设G是$\mathbf{C}^n$中的全纯域. 如果存在$g\in C^\infty(G)$，使得f_i/g在U_i上是C^∞的且无零点，则 Cousin 第二问题有解.

证 命$f_{ij}=\dfrac{f_j}{f_i}=\dfrac{f_j/g}{f_i/g}$. 根据假定，$f_j/g$与$f_i/g$在$U_i\cap U_j$上

都是C^∞的且无零点，因而

$$\log f_{ij}=\log \frac{f_j}{g}-\log \frac{f_i}{g}, \quad z\in U_i\cap U_j.$$

两端可能相差$2\pi i$的整数倍. 因为f_j/f_i在$U_i\cap U_j$中全纯且无零点，故$\log f_{ij}$在$U_i\cap U_j$中全纯. 因而$\bar\partial\log f_{ij}=0$，或者$\bar\partial\log \frac{f_j}{g}=\bar\partial\log \frac{f_i}{g}$在$U_i\cap U_j$上成立. 在$U_i$上定义(0,1)形式如下：

$$\omega=\bar\partial\log \frac{f_i}{g}, \quad z\in U_i.$$

由于当$z\in U_i\cap U_j$时，$\bar\partial\log \frac{f_i}{g}=\bar\partial\log \frac{f_j}{g}$，所以$\omega$在$G$上有定义，且$\omega\in C^\infty_{(0,1)}(G)$. 从$\bar\partial^2=0$知$\bar\partial\omega=0$. 故由定理6.4.6知$\bar\partial$方程$\bar\partial u=\omega$有解$u\in C^\infty(G)$. 今在$U_i$上命$v_i=\log \frac{f_i}{g}-u$，因为

$$\bar\partial v_i=\bar\partial\log \frac{f_i}{g}-\bar\partial u=0,$$

所以$v_i\in H(U_i)$. 今在U_i上定义

$$f=\frac{f_i}{e^{v_i}},$$

则$f\in H(U_i)$. 当$z\in U_i\cap U_j$时，

$$\frac{e^{v_j}}{e^{v_i}}=\frac{e^{\log\frac{f_j}{g}-u}}{e^{\log\frac{f_i}{g}-u}}=\frac{f_j}{f_i},$$

即 $\frac{f_i}{e^{v_i}}=\frac{f_j}{e^{v_j}}$. 所以$f$是$G$上的全纯函数，且在$U_i$上，$\frac{f_i}{f}=e^{v_i}\neq 0$. 所以$f$就是Cousin第二问题的解. □

6.6.2 除法问题

作为Cousin第一问题的一个应用，我们来讨论除法问题.

所谓除法问题是指：设G是$\mathbf{C}^n$中的域，$0\in G$，f是G上的全纯函数，满足$f(0)=0$. 问是否存在G中的全纯函数$g_1,\cdots,g_n$，使得

$$f(z)=\sum_{j=1}^{n} z_j g_j(z) \tag{1}$$

在 G 中成立？

显然，由于 $f\in H(G)$ 且 $f(0)=0$，把 f 在原点附近展开成幂级数就能得到(1). 但只能断言在原点附近成立，至于(1)是否能在 G 中成立是不容易回答的.

这里我们将证明，如果 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域，那么除法问题有解. 这一结论在下面讨论 $\bar{\partial}$ 问题解的一致估计时将要用到.

为此，我们先证明两个引理.

引理6.6.3 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域. 如果集合

$$E=\{z\in G: z_1=0\}$$

不空，那么每一个 E 上的全纯函数都可全纯开拓到 G 上.

这就是引理6.5.2，我们已经证明过. 现在作为 Cousin 第一问题应用的例子，给出一个新的证明.

证 任取 $\varphi\in H(E)$，对每个 $z\in E$，存在 $\mathbf{C}^n$ 中的邻域 U_z，使得 φ 在 U_z 中全纯. 命 $U=\bigcup\limits_{z\in E} U_z$，则 U 是 E 的一个邻域，φ 在 U 上全纯，因而 $\dfrac{\varphi}{z_1}$ 是 U 上一个亚纯函数. 命 $U_1=U\cap G$，$f_1=\dfrac{\varphi}{z_1}$，$U_2=G-E$，$f_2=0$，则 $\{U_1, U_2\}$ 构成 G 的一个开覆盖，f_1 在 U_1 上亚纯，f_2 在 U_2 上全纯，且在 $U_1\cap U_2$ 上，$f_2-f_1=-\dfrac{\varphi}{z_1}$ 全纯. 由于 G 是拟凸域，Cousin 第一问题有解，即在 G 上存在亚纯函数 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f}-f_j\in H(U_j)$，$j=1, 2$. 因为 $f_2=0$，故 $\tilde{f}$ 在 U_2 上全纯. 在 U_1 上，函数

$$h(z)=\tilde{f}(z)-\frac{\varphi(z)}{z_1} \tag{2}$$

是全纯的，因而 $z_1\tilde{f}(z)=\varphi(z)+z_1 h(z)$ 也在 U_1 上全纯. 当然 $z_1\tilde{f}$ 也在 U_2 上全纯，所以 $z_1\tilde{f}\in H(G)$. 命 $f=z_1\tilde{f}$，当 $z\in E$ 时，由(2)知，

$z_1h(z)=f(z)-\varphi(z)$. 但此时 $z_1=0$,故 $f(z)=\varphi(z)$,所以 f 是 φ 在 G 上的一个全纯开拓. □

引理6.6.4 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域. 如果集合

$$E=\{z\in G:z_1=z_2=\cdots=z_k=0\},\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

不空，那么对每个 $f\in H(G)$ 且满足 $f|_E=0$者，必存在 g_1，…，$g_k\in H(G)$,使得

$$f(z)=\sum_{j=1}^{k}z_jg_j(z)$$

在 G 上成立.

证 用归纳法证明. 当 $k=1$时，命

$$g_1(z)=\begin{cases}0, & z\in E,\\ \dfrac{f(z)}{z_1}, & z\in G-E,\end{cases}$$

则 $g_1\in H(G)$，且 $f=z_1g_1$在 G 上成立，即引理当 $k=1$时成立. 现设 $k\leqslant m-1$时引理成立. 命

$$G_m=\{z\in G:z_m=0\}.$$

因为 G 是拟凸域，所以 G_m 的每个连通分支在 $\mathbf{C}^{n-1}$中是拟凸域. 考虑 $n-1$个变量的函数

$$F=f(z_1,\cdots,z_{m-1},0,z_{m+1},\cdots,z_n),$$

它在 G_m 中全纯，由 $f|_E=0$得知 F 在

$$\{z\in G_m:z_1=z_2=\cdots=z_{m-1}=0\}$$

上取零值. 由归纳假定，存在 $\tilde{g}_j\in H(G_m)$，$j=1$，…，$m-1$，使得

$$F=\sum_{j=1}^{m-1}z_j\tilde{g}_j(z_1,\cdots,z_{m-1},z_{m+1},\cdots,z_n).$$

由引理6.6.3知，每个 $\tilde{g}_j$ 对应着一个 $g_j\in H(G)$，使得当 $z\in G_m$ 时，$\tilde{g}_j(z)=g_j(z)$. 作函数

$$\varphi(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{m-1} z_j g_j(z),$$

显然 $\varphi \in H(G)$，且当 $z \in G_m$ 时

$$\varphi(z) = F(z) - \sum_{j=1}^{m-1} z_j \tilde{g}_j(z) = 0.$$

再应用引理 $k=1$的情形，即得 $\varphi(z) = z_m g_m(z)$，这里 $g_m \in H(G)$. 由此即得

$$f(z) = \sum_{j=1}^{m} z_j g_j(z).$$

证明完毕. □

现在很容易证明我们的主要定理.

定理6.6.5 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域，则除法问题有解.

证 因为 $f \in H(G)$，$f(0)=0$，由于$0 \in G$，所以

$$E = \{z \in G: z_1 = \cdots = z_n = 0\} = \{0\}$$

不空. $f(0)=0$即 $f|_E = 0$. 在引理6.6.4中取 $k=n$ 即得定理的证明. □

§ 6.7 $\bar{\partial}$问题解的一致估计

6.7.1 Henkin 核的构造

前面我们用 L^2估计的方法，证明在拟凸域上 $\bar{\partial}$ 问题有解，而且得到了解的 L^2估计（见定理6.2.5 (i)）. 在 § 4.7我们利用复平面上的非齐次 Cauchy 积分公式（定理4.7.1）导出了 $\mathbf{C}$ 中有界域上 $\bar{\partial}$ 问题解的积分表示，并由此而得到了解的一致估计（定理4.7.2）. 这一节的目的是要把定理4.7.2的结果推广到 $\mathbf{C}^n$ 中去，得到 $\mathbf{C}^n$ 中有界强拟凸域上 $\bar{\partial}$ 问题解的积分表示，并由此而得到解的一致估计.

让我们来分析一下如何进行这项工作. 定理4.7.2是由定理4.7.1推导出来的，定理4.7.1在 $\mathbf{C}^n$ 中的推广就是 Bochner-Mar-

tinelli 积分公式（定理4.8.2），那么从 Bochner-Martinelli 积分公式出发，是否能得到 $\mathbf{C}^n$ 中有界强拟凸域上 $\bar{\partial}$ 问题解的积分表示呢？回答是否定的. 关键的原因是 Bochner-Martinelli 核 $K_{B\text{-}M}(z,\zeta)$ 对 z 不是全纯的，这是它与 Cauchy 核最大的不同之处.

这样就产生一个新的问题，能否构造一个新的核 $K(z,\zeta)$，它对变量 z 是全纯的，但同时类似于定理4.8.2(3)的 Bochner-Martinelli 积分公式又能成立？

我们还是从分析 Bochner-Martinelli 核的构造入手. 为此需要下面两个引理.

引理6.7.1 设 s 和 g 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集 G 到 $\mathbf{C}^n-\{0\}$ 的映射. 如果函数 $\varphi: G\to\mathbf{C}$ 使得 $g=\varphi s$ 成立，那么 $\eta(g)=\varphi^n\eta(s)$，这里 $\eta(g)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j dg_1\wedge\cdots\wedge[j]\wedge\cdots\wedge dg_n$，$\eta(s)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}s_j ds_1\wedge\cdots\wedge[j]\wedge\cdots\wedge ds_n$.

证 由假定 φ 在 G 中没有零点. 今设 $s_1\neq0$，则 $g_1\neq0$. 由于 $d\left(\frac{g_k}{g_1}\right)=\frac{1}{g_1}dg_k-\frac{g_k}{g_1}dg_1$，$k=2,\cdots,n$，所以

$$d\left(\frac{g_2}{g_1}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{g_n}{g_1}\right)=\frac{1}{g_1^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j dg_1\wedge\cdots\wedge[j]\wedge\cdots\wedge dg_n=\frac{1}{g_1^n}\eta(g).$$

同样道理，

$$d\left(\frac{s_2}{s_1}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{s_n}{s_1}\right)=\frac{1}{s_1^n}\eta(s).$$

因为 $g=\varphi s$，所以 $\frac{s_k}{s_1}=\frac{g_k}{g_1}$，$k=1,2,\cdots,n$. 由此即得

$$\eta(g)=\varphi^n\eta(s).$$

如果 $s_1=0$，可取其它 $s_j\neq0$ 代替之. □

引理6.7.2 设 $\theta_j=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}dz_k$，$j=1$，…，$n$. 如果 θ_1，…，θ_n 线性相关，那么 $\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_n=0$.

证 存在不全为0的 c_1，…，c_n，使得 $\sum_{j=1}^{n}c_j\theta_j=0$，但是

$$\sum_{j=1}^{n}c_j\theta_j=\sum_{j=1}^{n}c_j\sum_{k=1}^{n}a_{jk}dz_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}c_ja_{jk}\right)dz_k,$$

所以 $\sum_{j=1}^{n}c_ja_{jk}=0,k=1$，…，$n$. 因而 $\det(a_{jk})=0$. 于是

$$\begin{aligned}\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_n&=\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}dz_{j_1}\wedge\cdots\wedge\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}dz_{j_n}\\&=\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}dz_{j_1}\wedge\cdots\wedge dz_{j_n}\\&=\sum_{(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}dz_{j_1}\wedge\cdots\wedge dz_{j_n}\\&=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\\&=\det(a_{jk})\,dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n=0,\end{aligned}$$

这里 $\sum_{(j_1\cdots j_n)}$ 表示对所有的排列 $(j_1\cdots j_n)$ 求和. □

现在可以来分析一下 Bochner-Martinelli（下面简写为 $B—M$）核. 从§4.8知道，$B—M$ 核为

$$K_{B-M}(z,\zeta)=\frac{\eta(\bar{\zeta}-\bar{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}},$$

这里 $\omega(\zeta)=d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$，$z\in G$，$\zeta\in\partial G$，所以 $\zeta-z\neq0$. 若取 $s=\bar{\zeta}-\bar{z}$，$g=\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^2}$，$\varphi=\frac{1}{|\zeta-z|^2}$，则 $g=\varphi s$，由引理6.7.1得

$$\eta(g) = \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}}\eta(s) = \frac{\eta(\bar{\zeta} - \bar{z})}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

因而 B—M 核又可改写为

$$K_{B\cdot M}(z,\zeta) = \eta(g) \wedge \omega(\zeta)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{j-1} \wedge dg_{j+1} \wedge \cdots$$

$$\wedge dg_n \wedge \omega(\zeta)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j(\partial g_1 + \bar{\partial} g_1) \wedge \cdots \wedge (\partial g_{j-1} + \bar{\partial} g_{j-1})$$

$$\wedge (\partial g_{j+1} + \bar{\partial} g_{j+1}) \wedge \cdots \wedge (\partial g_n + \bar{\partial} g_n) \wedge \omega(\zeta).$$

因为 $\omega(\zeta)=d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$ 是$(n,0)$形式，所以 $\partial g_k\wedge\omega(\zeta)=0$，因而

$$K_{B\cdot M}(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j\bar{\partial} g_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial} g_{j-1} \wedge \bar{\partial} g_{j+1}$$

$$\wedge \cdots \wedge \bar{\partial} g_n \wedge \omega(\zeta), \tag{1}$$

这里 $g_j(z,\zeta)=\frac{\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j}{|\zeta-z|^2}$，$j=1, \cdots, n$.

现在可从（1）出发来证明 B—M 核对 ζ 而言是 $\bar{\partial}$ 闭形式，即 $\bar{\partial}_\zeta K_{B\cdot M}(z,\zeta)=0$，这是证明 B—M 积分公式关键的一步. 事实上，从 g_j 的表达式立刻可得

$$\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)g_j(z,\zeta) = 1, \tag{2}$$

因而 $\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)\bar{\partial} g_j(z,\zeta) = 0$. 这说明 n 个（0, 1）形式 $\bar{\partial} g_1$，$\cdots$，$\bar{\partial} g_n$ 是线性相关的. 于是，从引理6.7.2即得 $\bar{\partial} g_1\wedge\cdots\wedge\bar{\partial} g_n=0$. 这样从（1）立刻可得

$$\bar{\partial} K_{B\cdot M}(z,\zeta)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\bar{\partial} g_j \wedge \bar{\partial} g_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial} g_{j-1} \wedge \bar{\partial} g_{j+1} \wedge \cdots$$

$$\wedge \bar{\partial} g_n \wedge \omega(\zeta)$$

$=0.$

由此可见，从 $B—M$ 核的表达式（1）出发证明它是 $\bar\partial$ 闭形式的关键是 g_j 所满足的等式（2），而这些 $g_j(z,\zeta)$ 对 z 恰恰不是全纯函数.

这样自然产生一种想法，能否构造一种新的1的分解（即等式（2）），使 $g_j(z,\zeta)$ 是 z 的全纯函数. 然后用这种新的 $g_j(z,\zeta)$ 按（1）那样产生一个新的核 $K(z,\zeta)$，这个新的核自然是 $\bar\partial$ 闭的. 这就是下面构造 Henkin 核的基本出发点.

构造这种新的 $g_j(z,\zeta)$ 时，需要对域附加条件才行. 我们先证明下面的

引理6.7.3 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的有界强拟凸域，则对任意给定的 $\zeta\in\partial G$，存在 $\tilde G\supset G$，使得 ζ 是 $\tilde G$ 的内点，而且在 $\tilde G$ 上存在全纯函数 $\Phi(z,\zeta)$ 满足 $\Phi(\zeta,\zeta)=0$，且当 $z\in G$ 时，$\Phi(z,\zeta)\neq 0$.

证 根据定理5.3.13，存在 G 的定义函数 ρ 和正数 λ_0，使得对任意非零的 $\xi\in\mathbf{C}^n$ 和 $\zeta\in\partial G$ 有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial z_j\partial\bar z_k}\xi_j\bar\xi_k\geqslant\lambda_0|\xi|^2. \tag{3}$$

今取定 $\zeta\in\partial G$，让 $\rho(z)$ 在 ζ 附近作 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}\rho(z)=&\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial z_j}(z_j-\zeta_j)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial\bar z_j}(\bar z_j-\bar\zeta_j)\\&+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial z_j\partial z_k}(z_j-\zeta_j)(z_k-\zeta_k)\\&+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial\bar z_j\partial\bar z_k}(\bar z_j-\bar\zeta_j)(\bar z_k-\bar\zeta_k)\\&+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial z_j\partial\bar z_k}(z_j-\zeta_j)(\bar z_k-\bar\zeta_k)+o(|z-\zeta|^2).\end{aligned}$$

由（3）可得

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial z_j\partial\bar z_k}(z_j-\zeta_j)(\bar z_k-\bar\zeta_k)\geqslant\lambda_0|z-\zeta|^2.$$

若记

$$F(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial z_j}(\zeta_j-z_j)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial z_j\partial z_k}(z_j-\zeta_j)(z_k-\zeta_k),$$

则上式可写为

$$\rho(z)\geqslant-2\mathrm{Re}F(z,\zeta)+\lambda_0|z-\zeta|^2+o(|z-\zeta|^2).$$

当 $z\in G$ 时，$\rho(z)<0$，因而当 z 充分接近 ζ 时有

$$2\mathrm{Re}F(z,\zeta)>\lambda_0|z-\zeta|^2.$$

这说明存在 ζ 的邻域 $V_1(\zeta)$，当 $z\in G\cap V_1(\zeta)$ 时，$F(z,\zeta)\neq 0$. 今取 ζ 的邻域 $V_2(\zeta)\subset V_1(\zeta)$，由推论4.6.6，存在非负的 C^∞ 函数 ψ，使得当 $z\in V_2(\zeta)$ 时，$\psi(z)\equiv1$；当 $z\notin V_1(\zeta)$ 时，$\psi\equiv0$. 命

$$\tilde{\rho}(z)=\rho(z)-\psi(z),\quad \tilde{G}=\{z\in\mathbf{C}^n:\tilde{\rho}(z)<0\},$$

则显然有 $G\subset\tilde{G}\subset G\cup V_1(\zeta)$，这是因为 ψ 是非负的，$G\subset\tilde{G}$ 是明显的. 今若取 $z\in\tilde{G}$，则 $\tilde{\rho}(z)<0$，即 $\rho(z)<\psi(z)$. 如果 $z\notin V_1(\zeta)$，则 $\psi(z)=0$，因而 $\rho(z)<0$，即 $z\in G$. 所以 $\tilde{G}\subset G\cup V_1(\zeta)$. 现在不妨设

$$\tilde{G}=G\cup V_3(\zeta),\ 其中\ V_3(\zeta)\subset V_1(\zeta).$$

根据上面的讨论，当 $z\in G\cap V_3(\zeta)$ 时，$F(z,\zeta)\neq0$. 今取 $g\in C^\infty(\tilde{G})$，使得 g 在 G 上处处不为0，而在 $V_3(\zeta)$ 上，$g=F(z,\zeta)$. 在 G 和 $V_3(\zeta)$ 上分别考虑全纯函数1和 $F(z,\zeta)$，在 $G\cap V_3(\zeta)$ 上 $\frac{1}{F(z,\zeta)}$ 和 $F(z,\zeta)$ 都没有零点，且全纯；且在 $\tilde{G}$ 上存在 C^∞ 函数 g，使得 $\frac{1}{g}$ 和 $\frac{F(z,\zeta)}{g}=1$ 分别在 G 和 $V_3(\zeta)$ 上是 C^∞ 的，且没有零点. 于是，根据定理6.6.2，Cousin 第二问题有解，即存在 $\tilde{G}$ 上的全纯函数 $\Phi(z,\zeta)$，使得 $\frac{1}{\Phi(z,\zeta)}$ 和 $\frac{F(z,\zeta)}{\Phi(z,\zeta)}$ 分别

在 G 和 V_3（ζ）全纯且无零点. $\dfrac{1}{\Phi(z,\zeta)}$在 G 上全纯，说明 $\Phi(z,\zeta)$ 在 G 上处处不为0. 在$V_3(\zeta)$上记$\dfrac{F(z,\zeta)}{\Phi(z,\zeta)}=H(z,\zeta)$，则$H(z,\zeta)$全纯且不为0. 写 $F(z,\zeta)=\Phi(z,\zeta)H(z,\zeta)$,则因 $F(\zeta,\zeta)=0$，所以 $\Phi(\zeta,\zeta)=0$. 因而 $\Phi(z,\zeta)$ 就是要找的函数. □

现在很容易证明下面的

定理6.7.4 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2边界的有界强拟凸域，则存在全纯的单位分解

$$1=\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)h_j(z,\zeta),$$

这里 $z\in G$，$\zeta\in\partial G$，$h_j(z,\zeta)$（$j=1,\cdots,n$）是 $z\in G$ 的全纯函数.

证 根据引理6.7.3，对于给定的$\zeta\in\partial G$，存在$\tilde{G}\supset G$和$\tilde{G}$上的全纯函数 $\Phi(z,\zeta)$，它在 G 上处处不为0，$\Phi(\zeta,\zeta)=0$. 作变换 $w=\zeta-z$，设 $\tilde{G}$，G 分别被变为 $\tilde{\Omega}$ 和 Ω，则$0\in\tilde{\Omega}$. 若记

$$\Phi(z,\zeta)=\Phi(\zeta-w,\zeta)=f(w),$$

则 f 是 $\tilde{\Omega}$ 中的全纯函数，且 $f(0)=\Phi(\zeta,\zeta)=0$. 于是，根据**定理**6.6.5，除法问题有解，即存在 $\tilde{\Omega}$ 上的全纯函数 $f_1,\cdots,f_n$，使得

$$f(w)=\sum_{j=1}^{n}w_jf_j(w).$$

若记 $f_j(w)=f_j(\zeta-z)=P_j(z,\zeta)$，则上式可写为

$$\Phi(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)P_j(z,\zeta).$$

因 $\Phi(z,\zeta)$ 在 G 中处处不为0，所以 $h_j(z,\zeta)=\dfrac{P_j(z,\zeta)}{\Phi_j(z,\zeta)}$是 G 中的全纯函数，而且有

$$1=\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)\ h_j\ (z,\ \zeta).\quad\square$$

有了这个全纯的单位分解定理，我们就可以构造所需要的核了.

现在有两种单位分解：

$$1=\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)\ \frac{\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j}{|\zeta-z|^2},$$

$$1=\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)\ h_j\ (z,\ \zeta),$$

引进参数 λ，把第一式乘 λ，第二式乘$1-\lambda$，然后相加，又得一新的单位分解：

$$1=\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)\ \left\{\lambda\frac{\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j}{|\zeta-z|^2}+\ (1-\lambda)\ h_j\ (z,\ \zeta)\right\}.$$

命

$$g_j\ (z,\ \zeta)\ =\lambda\frac{\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j}{|\zeta-z|^2}+\ (1-\lambda)\ h_j\ (z,\ \zeta),\qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

所谓 Henkin 核是指

$$K\ (\lambda,\ z,\ \zeta)\ =\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j dg_1\wedge\cdots$$
$$\wedge dg_{j-1}\wedge dg_{j+1}\wedge\cdots\wedge dg_n\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n.$$

容易看出，当 $\lambda=1$时，$K\ (1,\ z,\ \zeta)$ 就是 B—M 核.

下面还要做三件事：(i) 建立 Henkin 核的积分公式，即相当于 B—M 核的 B—M 积分公式. (ii) 证明 Henkin 核的积分公式能给出 $\overline{\partial}$问题的解. (iii) 对解作出一致估计. 这里 (i)，(ii) 两件事都还容易做，最困难的是 (iii).

6.7.2　$\overline{\partial}$问题解的 Henkin 积分表示

下面就是 Henkin 核的积分公式.

定理6.7.5　设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2边界的有界强拟凸域，$f\in C^1(\overline{G})$,则

$$f(z)=\frac{1}{nc_n}\int_{\partial G}\bar{\partial}f\wedge\int_0^1 K(\lambda,z,\zeta)d\lambda$$
$$+\frac{1}{nc_n}\int_G\bar{\partial}f\wedge K(1,z,\zeta)$$
$$-\frac{1}{nc_n}\int_{\partial G}f(\zeta)K(0,z,\zeta)$$

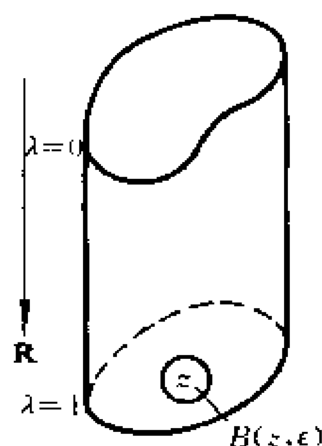


图 3

在 G 上成立，这里

$$c_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(2\pi i)^n}{n!}.$$

这个公式称为 Leray-Stokes 公式.

证 从 $K(\lambda,z,\zeta)$ 的构造知道，$dK(\lambda,z,\zeta)=0$，所以有 $d(f(\zeta)K(\lambda,z,\zeta))=\bar{\partial}f(\zeta)\wedge K(\lambda,z,\zeta)$. 现在让 $d(f(\zeta)K(\lambda,z,\zeta))$ 在下列曲面上积分，积分区域为一曲面，它无上底($\lambda=0,\zeta\in G$)，但有下底($\lambda=1$, $\zeta\in G-B(z,\varepsilon)$)和侧面($(\zeta,\lambda)\in\partial G\times[0,1]$)，它的边界是$\{\lambda=0,\zeta\in\partial G\}\cup\{\lambda=1,\zeta\in\partial B(z,\varepsilon)\}$. 根据 Stokes 公式有

$$\int_{\substack{\lambda\in[0,1]\\ \zeta\in\partial G}}\bar{\partial}f(\zeta)\wedge K(\lambda,z,\zeta)+\int_{\substack{\lambda=1\\ \zeta\in G-B(z,\varepsilon)}}\bar{\partial}f(\zeta)\wedge K(\lambda,z,\zeta)$$
$$=\int_{\substack{\lambda=0\\ \zeta\in\partial G}}f(\zeta)K(\lambda,z,\zeta)+\int_{\substack{\lambda=1\\ \zeta\in\partial B(z,\varepsilon)}}f(\zeta)K(\lambda,z,\zeta). \tag{4}$$

左端第一项可以写成

$$\int_{\partial G}\bar{\partial}f(\zeta)\wedge\int_0^1 K(\lambda,z,\zeta)d\lambda,$$

左端第二项当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$\int_{\substack{\lambda=1\\ \zeta\in G-B(z,\varepsilon)}}\bar{\partial}f(\zeta)\wedge K(\lambda,z,\zeta)=\int_{G-B(z,\varepsilon)}\bar{\partial}f(\zeta)\wedge K(1,z,\zeta)$$
$$\to\int_G\bar{\partial}f(\zeta)\wedge K(1,z,\zeta).$$

根据定理4.8.2的证明，当 $\varepsilon\to 0$ 时，右端第二项有极限

$$\int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\zeta)K(1,z,\zeta)$$

$$=\int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\zeta)K_{B-M}(z,\zeta)\to nC_n f(z).$$

故在(4)中命 $\varepsilon\to 0$,即得所要证的公式. □

推论6.7.6 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的有界强拟凸域. 如果 $f\in C^1(\overline{G})\cap H(G)$,那么

$$f(z)=-\frac{1}{nC_n}\int_{\partial G} f(\zeta)K(0,z,\zeta).$$

证 用 Leray-Stokes 公式并注意 $\bar\partial f=0$即得. □

应用 Leray-Stokes 公式容易得到 $\bar\partial$ 问题解的 Henkin 积分表示.

定理6.7.7 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2 边界的有界强拟凸域. $f\in C^\infty_{(0,1)}(\overline{G})$且满足 $\bar\partial f=0$,则由公式

$$u(z)=\frac{1}{nC_n}\int_{\partial G} f\wedge\int_0^1 K(\lambda,z,\zeta)d\lambda+\frac{1}{nC_n}\int_G f\wedge K(1,z,\zeta) \tag{5}$$

所定义的 u 满足方程 $\bar\partial u=f$,且 $u\in C^\infty(G)$.

证 由解的正则性定理6.4.7,在所设条件下,$\bar\partial u=f$ 存在解 $u_1\in C^\infty(\overline{G})$. 对 u_1用 Leray-Stokes 公式:

$$\begin{aligned}
u_1(z)=&\frac{1}{nC_n}\int_{\partial G}\bar\partial u_1\wedge\int_0^1 K(\lambda,z,\zeta)d\lambda+\frac{1}{nC_n}\int_G\bar\partial u_1\wedge K(1,z,\zeta)\\
&-\frac{1}{nC_n}\int_{\partial G}u_1(\zeta)K(0,z,\zeta)\\
=&\frac{1}{nC_n}\int_{\partial G} f\wedge\int_0^1 K(\lambda,z,\zeta)d\lambda+\frac{1}{nC_n}\int_G f\wedge K(1,z,\zeta)\\
&-\frac{1}{nC_n}\int_{\partial G}u_1(\zeta)K(0,z,\zeta)\\
=&u(z)-\frac{1}{nC_n}\int_{\partial G}u_1(\zeta)K(0,z,\zeta).
\end{aligned} \tag{6}$$

由于 $K(0,z,\zeta)$ 是 z 的全纯函数，所以

$$\bar{\partial}\left(\int_{\partial G} u_1(\zeta)K(0,z,\zeta)\right)=0.$$

于是，从(6)即得 $u\in C^\infty(G)$，而且

$$\bar{\partial}u=\bar{\partial}u_1=f. \ \square$$

6.7.3 $\bar{\partial}$问题解的一致估计

最后来完成最困难的一件事，即证明由(5)给出的解具有一致估计. 为此，先给出 Henkin 核的另一个表达式.

引理6.7.8 设 $\theta_j=\sum\limits_{k_j=1}^{n}a_{jk_j}d\zeta_{k_j}$，$j=1,\cdots,n-2$，那么

$$\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{n-2}=\sum_{1\leqslant q_1<\cdots<q_{n-2}\leqslant n}\det\begin{pmatrix}a_{1q_1} & \cdots & a_{1q_{n-2}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-2,q_1} & \cdots & a_{n-2,q_{n-2}}\end{pmatrix}$$

$$\cdot d\zeta_{q_1}\wedge\cdots\wedge d\zeta_{q_{n-2}}.$$

证 $\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{n-2}$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_{n-2}=1}^{n}a_{1k_1}\cdots a_{n-2,k_{n-2}}d\zeta_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\zeta_{k_{n-2}}.$$

因为每个 $k_j(j=1,\cdots,n-2)$ 都从1变到 n，故上式给出了所有可能的线性组合. 现固定 $(q_1\cdots q_{n-2})$，使得 $q_1<q_2<\cdots<q_{n-2}$，我们来计算 $d\zeta_{q_1}\wedge\cdots\wedge d\zeta_{q_{n-2}}$ 的系数. 设 $(k_1\cdots k_{n-2})$ 是 $(q_1\cdots q_{n-2})$ 的一个排列，于是 $d\zeta_{q_1}\wedge\cdots\wedge d\zeta_{q_{n-2}}$ 的系数为

$$\sum_{(k_1\cdots k_{n-2})}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{n-2})}a_{1k_1}\cdots a_{n-2,k_{n-2}}=\det\begin{pmatrix}a_{1q_1} & \cdots & a_{1q_{n-2}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-2,q_1} & \cdots & a_{n-2,q_{n-2}}\end{pmatrix}$$

由此即得所要证的等式. $\square$

引理6.7.9 Henkin 核可表示为

$$K(\lambda,z,\zeta)=\sum_{1\leqslant q_1<\cdots<q_{n-2}\leqslant n}\det A_{q_1\cdots q_{n-2}}d\lambda\wedge d\bar{\zeta}_{q_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_{q_{n-2}}$$

$$\wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n,$$

这里 $A_{q_1\cdots q_{n-2}}$ 是下面的 n 阶方阵

$$A_{q_1\cdots q_{n-2}}=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ \frac{\partial g_1}{\partial\lambda} & \frac{\partial g_2}{\partial\lambda} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial g_1}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}} & \frac{\partial g_2}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}} & \frac{\partial g_2}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}} \end{pmatrix},$$

这里 $g_j(z,\zeta)=\lambda\dfrac{\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j}{|\zeta-z|^2}+(1-\lambda)h_j(z,\zeta),j=1,\cdots,n.$

证 根据 Henkin 核的定义

$$K(\lambda,z,\zeta)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j dg_1\wedge\cdots\wedge[dg_j]$$
$$\wedge\cdots\wedge dg_n\wedge\omega(\zeta),$$

这里$[dg_j]$表示乘积中不出现这一项.因为

$$dg_j=\partial g_j+\bar{\partial}g_j+\frac{\partial g_j}{\partial\lambda}d\lambda$$

且 $\partial g_j\wedge\omega(\zeta)=0$,所以有

$$K(\lambda,z,\zeta)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j(\bar{\partial}g_1+\frac{\partial g_1}{\partial\lambda}d\lambda)\wedge\cdots$$
$$\wedge[\bar{\partial}g_j+\frac{\partial g_j}{\partial\lambda}d\lambda]\wedge\cdots\wedge(\bar{\partial}g_n+\frac{\partial g_n}{\partial\lambda}d\lambda)\wedge\omega(\zeta)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j\sum_{l\neq j}\bar{\partial}g_1\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}g_{l-1}\wedge\frac{\partial g_l}{\partial\lambda}d\lambda$$
$$\wedge\bar{\partial}g_{l+1}\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_j]\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}g_n\wedge\omega(\zeta)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l<j}(-1)^{j+l}g_j\frac{\partial g_l}{\partial\lambda}d\lambda\wedge\bar{\partial}g_1\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_l]\wedge\cdots$$
$$\wedge[\bar{\partial}g_j]\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}g_n\wedge\omega(\zeta)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l>j}(-1)^{j+l-1}g_j\frac{\partial g_l}{\partial\lambda}d\lambda\wedge\bar{\partial}g_1\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_j]\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_l]\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}g_n\wedge\omega(\zeta).$$

在第一个和中把 j 和 l 的指标对换，并注意到等式 $\sum_{l=1}^{n}\sum_{j<l}a_{jl}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{j<l}a_{jl}$，可得

$$K(\lambda,z,\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{j<l}(-1)^{j+l}g_l\frac{\partial g_j}{\partial\lambda}d\lambda\wedge\bar{\partial}g_1\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_j]\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_l]\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}g_n\wedge\omega(\zeta)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{j<l}(-1)^{j+l-1}g_j\frac{\partial g_l}{\partial\lambda}d\lambda\wedge\bar{\partial}g_1\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_j]\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_l]\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}g_n\wedge\omega(\zeta)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{j<l}(-1)^{j+l-1}\det\begin{pmatrix}g_j & g_l\\ \frac{\partial g_j}{\partial\lambda} & \frac{\partial g_l}{\partial\lambda}\end{pmatrix}d\lambda\wedge\bar{\partial}g_1\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_j]\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_l]\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}g_n\wedge\omega(\zeta).$$

由引理6.7.8，

$$\bar{\partial}g_1\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_j]\wedge\cdots\wedge[\bar{\partial}g_l]\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}g_n=\sum_{1\leqslant q_1<\cdots<q_{n-2}\leqslant n}\det(*)d\bar{\zeta}_{q_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_{q_{n-2}},\tag{7}$$

其中

$$(*)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}} & \cdots & \frac{\partial g_{j-1}}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}} & \frac{\partial g_{j+1}}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}} & \cdots & \frac{\partial g_{l-1}}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}} & \frac{\partial g_{l+1}}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}}\\ \cdots\cdots & & & & & & & & \cdots\cdots\\ \frac{\partial g_1}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}} & \cdots & \frac{\partial g_{j-1}}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}} & \frac{\partial g_{j+1}}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}} & \cdots & \frac{\partial g_{l-1}}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}} & \frac{\partial g_{l+1}}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}}\end{pmatrix}.$$

把(7)式代入 $K(\lambda,z,\zeta)$ 的表示式，得

$$K(\lambda,z,\zeta)=\sum_{1\leqslant q_1<\cdots<q_{n-2}\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{j<l}(-1)^{j+l-1}\det\begin{pmatrix}g_j & g_l\\ \frac{\partial g_j}{\partial\lambda} & \frac{\partial g_l}{\partial\lambda}\end{pmatrix}\det(*)\right\}$$

$$\cdot d\lambda \wedge d\overline{\zeta}_{q_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{\zeta}_{q_{n-2}} \wedge \omega(\zeta). \tag{8}$$

根据行列式的 Laplace 展开式，(8)式花括弧中的量就是 n 阶方阵 $A_{q_1\cdots q_{n-2}}$的行列式，这就是要证明的. □

现在可以证明一致估计的定理了.

定理6.7.10 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 C^2边界的有界强拟凸域，$f\in C^\infty_{(0,1)}(\overline{G})$且满足 $\overline{\partial}f=0$，则由(5)确定的 $\overline{\partial}$ 问题的解 u 具有一致估计

$$\|u\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty,$$

其中 C 是不依赖于 f 的某个常数.

证 先看(5)的第二项. 设$f=\sum_{l=1}^n f_l d\overline{\zeta}_l$，

$$\begin{aligned}
&|f \wedge K(1,z,\zeta)| \\
&\quad = |f\wedge K_{B-M}(z,\zeta)| \\
&\quad = \left|\sum_{l=1}^n f_l \overline{d\zeta_l} \wedge \frac{\eta(\overline{\zeta}-\overline{z})\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}\right| \\
&\quad = \left|\sum_{l=1}^n f_l \overline{d\zeta_l} \wedge \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}\frac{\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j}{|\zeta-z|^{2n}}\right. \\
&\qquad \left.\cdot d\overline{\zeta}_1\wedge\cdots\wedge[j]\wedge\cdots\wedge\overline{d\zeta_n}\wedge\omega(\zeta)\right| \\
&\quad \leqslant \sum_{j=1}^n \frac{|\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j|}{|\zeta-z|^{2n}}\|f\|_\infty |\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)|.
\end{aligned}$$

若记 $\zeta_j=x_j+iy_j$，那么

$$d\overline{\zeta}_j \wedge d\zeta_j = (dx_j - idy_j)\wedge(dx_j+idy_j) = 2idx_j\wedge dy_j,$$

因而

$$\begin{aligned}
\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta) &= d\overline{\zeta}_1\wedge\cdots\wedge d\overline{\zeta}_n\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2i)^n dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots
\end{aligned}$$

$$\wedge dx_n \wedge dy_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2i)^n dm_{2n}.$$

由此即得

$$|f \wedge K(1,z,\zeta)| \leqslant 2^n \|f\|_\infty \sum_{j=1}^n \frac{|\zeta_j - z_j|}{|\zeta - z|^{2n}} dm_{2n}.$$

因为 G 是有界域，故可选取充分大的 R，使得 $G \subset B(z,R)$. 于是

$$\left|\int_G f \wedge K(1,z,\zeta)\right| \leqslant \int_{B(z,R)} |f \wedge K(1,z,\zeta)|$$

$$\leqslant 2^n \|f\|_\infty \int_{B(z,R)} \sum_{j=1}^n \frac{|\zeta_j - z_j|}{|\zeta - z|^{2n}} dm_{2n}. \qquad (9)$$

现在来估计积分 $\int_{B(z,R)} \frac{|\zeta_1 - z_1|}{|\zeta - z|^{2n}} dm_{2n}$. 若记 $z = (x_1, \cdots, x_{2n})$，$\zeta = (y_1, \cdots, y_{2n})$，则 $z_1 = x_1 + ix_2$，$\zeta_1 = y_1 + iy_2$，采用球坐标

$$y_1 - x_1 = r\cos\varphi_1, y_2 - x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \cdots,$$

$$y_{2n} - x_{2n} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-1},$$

这时体积元素

$$dm_{2n} = r^{2n-1}\sin^{2n-2}\varphi_1\sin^{2n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-2}dr d\varphi_1\cdots d\varphi_{2n-1}.$$

于是

$$\int_{B(z,R)} \frac{|\zeta_1 - z_1|}{|\zeta - z|^{2n}} dm_{2n}$$

$$\leqslant \int_{B(z,R)} \frac{|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|}{|\zeta - z|^{2n}} dm_{2n},$$

而

$$\int_{B(z,R)} \frac{|y_1 - x_1|}{|\zeta - z|^{2n}} dm_{2n}$$

$$\leqslant \int_0^R \frac{r}{r^{2n}} r^{2n-1} dr \int_0^\pi\int_0^\pi \cdots \int_0^{2\pi} \sin^{2n-2}\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{2n-2} d\varphi_1 \cdots d\varphi_{2n-1}$$

$$= O(1).$$

易知其它类似的积分也都是有界量. 于是，从(9)即得

$$\left|\int_G f \wedge K(1,z,\zeta)\right| \leqslant C_1\|f\|_\infty, \tag{10}$$

剩下来需要证明的是

$$\left|\int_{\partial G} f \wedge \int_0^1 K(\lambda,z,\zeta)d\lambda\right| \leqslant C_2\|f\|_\infty. \tag{11}$$

这比证明不等式(10)要困难得多. 首先注意,要证明(11),只要证明当 $\lambda\in[0,1]$时,有

$$\left|\int_{\partial G} f \wedge K(\lambda,z,\zeta)\right| \leqslant C_2\|f\|_\infty$$

就行了. 根据引理6.7.9关于 Henkin 核的表达式,可写

$$\begin{aligned} f \wedge K(\lambda,z,\zeta) = \sum_{1\leqslant q_1<\cdots<q_{n-2}\leqslant n} \sum_{j=1}^n f_j \det A_{q_1\cdots q_{n-2}} d\bar{\zeta}_j \\ \wedge d\lambda \wedge \overline{d\zeta}_{q_1} \wedge \cdots \wedge \overline{d\zeta}_{q_{n-2}} \wedge \omega(\zeta). \end{aligned}$$

这样全部问题归结为证明

$$\left|\int_{\partial G} \det A_{q_1\cdots q_{n-2}} d\bar{\zeta}_j \wedge d\bar{\zeta}_{q_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_{q_{n-2}} \wedge \omega(\zeta)\right| = O(1) \tag{12}$$

对 $z\in G$ 成立就行.

为此,我们要计算 $\det A_{q_1\cdots q_{n-2}}$. 注意

$$g_j(z,\zeta)=\lambda\frac{\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j}{|\zeta-z|^2}+(1-\lambda)\frac{P_j(z,\zeta)}{\Phi(z,\zeta)}$$

(关于 $\Phi(z,\zeta)$ 和 $P_j(z,\zeta)$ 的定义分别参见引理6.7.3和定理6.7.4的证明)，所以 $\frac{\partial g_j}{\partial\lambda}=\frac{\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j}{|\zeta-z|^2}-\frac{P_j}{\Phi}$. 简记 $a_j=\frac{\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j}{|\zeta-z|^2}$, $b_j=\frac{P_j}{\Phi}$，则 g_j 和 $\frac{\partial g_j}{\partial\lambda}$ 可分别写成

$$g_j=\lambda a_j+b_j-\lambda b_j,\ \frac{\partial g_j}{\partial\lambda}=a_j-b_j,$$

如果记 $a=(a_1,\cdots,a_n)$, $b=(b_1,\cdots,b_n)$，则 $\det A_{q_1\cdots q_{n-2}}$ 可分拆成第一、第二行分别如下的6个行列式的和：

$$\begin{pmatrix}\lambda a\\ a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b\\ b\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}b\\ b\end{pmatrix},$$

其中第一、五、六个为0，第三、四个之和为0，因而得

$$\det A_{q_1\cdots q_{n-2}}=-\begin{vmatrix}\frac{\overline{\zeta}_1-\overline{z}_1}{|\zeta-z|^2} & \cdots & \frac{\overline{\zeta}_n-\overline{z}_n}{|\zeta-z|^2}\\ \frac{P_1}{\Phi} & \cdots & \frac{P_n}{\Phi}\\ \frac{\partial g_1}{\partial\overline{\zeta}_{q_1}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial\overline{\zeta}_{q_1}}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial g_1}{\partial\overline{\zeta}_{q_{n-2}}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial\overline{\zeta}_{q_{n-2}}}\end{vmatrix}.$$

直接算出 $\frac{\partial g_j}{\partial\overline{\zeta}_k}$ 之后再用刚才打散行列式的办法得

$\det A_{q_1\cdots q_{n-2}}=$

$$\begin{vmatrix} \frac{\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1}{|\zeta-z|^2} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\bar{\zeta}_n-\bar{z}_n}{|\zeta-z|^2} \\ \frac{P_1}{\Phi} & \cdots\cdots\cdots & \frac{P_n}{\Phi} \\ \frac{\lambda\delta_{1q_1}}{|\zeta-z|^2}+\frac{1-\lambda}{\Phi}\frac{\partial P_1}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}}, & \cdots & \frac{\lambda\delta_{nq_1}}{|\zeta-z|^2}+\frac{1-\lambda}{\Phi}\frac{\partial P_n}{\partial\bar{\zeta}_{q_1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\lambda\delta_{1q_{n-2}}}{|\zeta-z|^2}+\frac{1-\lambda}{\Phi}\frac{\partial P_1}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}}, & \cdots, & \frac{\lambda\delta_{nq_{n-2}}}{|\zeta-z|^2}+\frac{1-\lambda}{\Phi}\frac{\partial P_n}{\partial\bar{\zeta}_{q_{n-2}}} \end{vmatrix} \cdot (13)$$

由此可见，$\det A_{q_1\cdots q_{n-2}}$的奇点就发生在$z=\zeta\in\partial G$处，因而只须考虑当$z\to\zeta\in\partial G$时（12）成立就行了．固定$\zeta\in\partial G$，已知在$\zeta$的某个邻域中，$\Phi$（$z$，$\zeta$）和$F$（$z$，$\zeta$）有相同的零点，这里

$$F(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial z_j}(\zeta_j-z_j)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial z_j\partial z_k}(z_j-\zeta_j)(z_k-\zeta_k). \qquad (14)$$

因此在估计（12）中的积分时，不妨将Φ（z，ζ）换成F（z，ζ）．另一方面，从$\det A_{q_1\cdots q_{n-2}}$的表达式（13）可以看出，在它的项中，在$\zeta$处奇性最高的是

$$\frac{1}{|\zeta-z|^{2(n-1)-1}|F|}=\frac{1}{|\zeta-z|^{2n-3}|F|}.$$

因此，只要证明

$$\left|\int_{\partial G}\frac{1}{|\zeta-z|^{2n-3}|F|}d\bar{\zeta}_j\wedge d\bar{\zeta}_{q_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_{q_{n-2}}\wedge\omega(\zeta)\right|$$

$$=O(1), \qquad (15)$$

（12）也就成立了．

现在设z在ζ的邻域中，这时$d\rho$（z）$\neq 0$，不妨设$\frac{\partial\rho}{\partial z_1}\neq 0$．在这个邻域中作坐标变换

$$(x_1,\cdots,x_{2n})\to(u_1,\cdots,u_{2n}),$$

这里$\zeta_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$，$w_j = u_{2j-1} + iu_{2j}$，命

$$u_1 = \rho(\zeta), u_2 = \mathrm{Im}F(z,\zeta), u_3 = x_3, \cdots, u_{2n} = x_{2n}.$$

直接计算可得这个变换的 Jacobi 行列式为$\left|\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_1}\right|^2 \neq 0$. 由于$\partial G = \{\zeta: \rho(\zeta) = 0\}$. 所以在这个邻域中$\partial G$变为$u_1 = 0$. 在引理6.7.3的证明中，我们得到过不等式

$$\rho(z) \geqslant -2\mathrm{Re}F(z,\zeta) + \lambda_0|z-\zeta|^2 + o(|z-\zeta|^2),$$

即 $2\mathrm{Re}F(z,\zeta) \geqslant |\rho(z)| + \lambda_0|z-\zeta|^2 \geqslant \lambda_0|z-\zeta|^2$，所以

$$|F| = \{(\mathrm{Re}F)^2 + (\mathrm{Im}F)^2\}^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{Re}F| + |\mathrm{Im}F|)$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\lambda_0}{2}|z-\zeta|^2 + |\mathrm{Im}F|\right) \geqslant C(|z-\zeta|^2 + |\mathrm{Im}F|).$$

于是，从局部来看，(15) 左端的积分不超过

$$\int_{r<1} \frac{du_2 \cdots du_{2n}}{r^{2n-3}(r^2 + |u_2|)}$$

的常数倍. 用球坐标

$$u_2 = r\cos\theta_1, u_3 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \cdots, u_{2n} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{2n-2},$$

则 $du_2\cdots du_{2n} = r^{2n-2}\sin^{2n-3}\theta_1\cdots\sin\theta_{2n-3}drd\theta_1\cdots d\theta_{2n-2}$. 于是上述积分不超过

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{drd\theta_1}{r + |\cos\theta_1|} = 4\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{drd\theta_1}{r + \sin\theta_1}$$

$$\leqslant 4\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{drd\theta}{r + \frac{2}{\pi}\theta_1}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\log(1 + \frac{2}{\pi}\theta_1) - \log\frac{2}{\pi}\theta_1\right)d\theta_1 < \infty.$$

这就证明了 (15) 成立，因而 (12) 也成立. □

[注记]

1937年 Oka 首先在全纯凸域上证明$\bar\partial$问题的解是存在的，不过他是用

Cousin 第一问题的解存在的方式叙述的. 关于拟凸域上$\bar{\partial}$问题解的存在性，第一个直接证明是1965年由 L. Hörmander [Hö1] 给出的. 所谓直接证明是指，它既不依赖于全纯凸域上 Cousin 第一问题的解，也不依赖于 Levi 问题的解. 这里介绍的就是 Hörmander 给出的方法。作为$\bar{\partial}$问题解的应用，我们给出了 Cousin 第一问题和第二问题的解. 从历史上来看，Cousin 第一问题早在1895年就由 P. Cousin 在乘积域上解决了，但是在以后的40年中，这个重要问题没有任何进展. 直到1936年，Oka 首先在多项式凸域上、稍后于1937年在一般的全纯凸域上解决了这个问题. 实际上，H. Cartan 已于1935年在 $\mathbf{C}^2$的多项式凸域上，解决了 Cousin 第一问题，但 Oka 不知道此情况. 那么在非全纯凸域上，Cousin 第一问题是否可能有解呢?H. Cartan [Ca. 2，536～538] 在1938年首先在 $\mathbf{C}^4$中构造了一个非全纯凸域，在其上 Cousin 第一问题有解.

Levi 问题1942年首先由 Oka 在 $\mathbf{C}^2$中解决，后来 Oka 于1953年，H. Bremermann [Br1] 于1954年，F. Norguet [No] 于1954年独立地解决了任意维数空间 $\mathbf{C}^n$ 中的 Levi 问题. 1958年 H. Grauert [Gr] 用凝聚解析层的理论解决了复流形上的 Levi 问题.

强拟凸域上$\bar{\partial}$问题解的积分表示，在1970年前后由 H. Grauert 和 I. Lieb [GrLi]，G. M. Henkin [He 1，2] 和 E. Ramirez [Rm] 得到. 当 f 是 (0，1) 形式时，强拟凸域上解的 L^∞ 估计是由 H. Grauert 和 I. Lieb [GrLi] 和 G. M. Henkin [He2] 解决的. 当 f 是 (0，q) 形式 ($q>1$) 时，强拟凸域上解的 L^∞估计是由 I. Lieb [Li] 解决的.

参 考 文 献

[Be] Bergman S. 核函数和共形映照. 龚昇、陈希孺译. 北京：科学出版社，1958

[BFG1] Barnard R W, FitzGerald C H and Gong S. Distortion theorem for biholomorphic mappings in $\mathbf{C}^2$. Chin. Sci. Bull. 1990, 35: 353～356; Trans. Amer. Math. Soc. 1994, 344: 907～924.

[BFG2] ——. The growth and $\frac{1}{4}$ theorems for starlike mappings in $\mathbf{C}^n$. Chin. Sci. Bull. 1989, 34: 161～162; Pacific J. of Math. 1991, 150: 13～22

[Bo] Bochner S. Analytic and meromorphic continuation by means of Green' s formula. Ann. of Math. 1943, 44: 652～673

[Br1] Bremermann H J. Über die äquivalenz der pseudokonvexen gebiete und der holomorphiegebiete im raum von n komplexen veränderlichen. Math. Ann. 1954, 128: 63～91

[Br2] ——. Complex convexity. Trans. Amer. Math. Soc. 1956, 82: 17～51

[Bu] Bungart L. Boundary kernel functions for domains on complex manifolds. Pacific J. of Math. 1964, 14: 1151～1164

[Ca1] Cartan H. Sur la possibili d'étendre aux fonctions de plusieus variables complexes la theorie des fonctions univalents, Lecons sur les fonctions univalents on multivalents, by P. Montel, Gauthier-Villar, 1933, 129～155

[Ca2] ——. Collected works. Remmert R and Serre J P eds. New York: Springer-Verlag, 1979

[CT] Cartan H and Thullen P. Zur theorie der Singularitälen der funktionen mehrerer komplexen veränderlichen. Math. Ann. 1932, 106: 617～647

[DR]Duren P L and Rudin W. Distortion in several variables. Complex Variables. 1986, 5: 323～326

[DZ] Dong D Z and Zhang W J. The growth and $\frac{1}{4}$ theorems for starlike mappings in a Banach space. to appear.

[Eh] Ehrenpreis L. A new proof and an extention of Hartogs' theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 1961, 67: 507～509

[Fe] Fefferman C. The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains. Invent. Math. 1974, 26: 1～65

[G1] Gong S (龚昇). 多复变数的奇异积分. 上海：上海科学技术出版社，1982

[G2] ——. Biholomorphic mappings in several complex variables. Contemporary Math. 1993, 142: 15～48

[G3] ——. 多复变数的凸映照和星形映照. 北京：科学出版社，1995

[GF] Grauert H and Fritzsche K. Several complex variables. New York: Springer-Verlag, 1976

[GL] Gong S (龚昇) and Liu T S (刘太顺). The growth theorem of biholomorphic convex mappings on B_p. Chin. Quar. J. of Math. 1991, 6: 78～82

[Gol] Golusin G M. 复变函数的几何理论. 陈建功译. 北京：科学出版社，1956

[Gr] Grauert H. On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds. Ann. of Math. 1958, 68: 460～472

[GrLi] Grauert H and Lieb I. Das Ramirezshe integral und die lösung der gleichung $\bar{\partial}f=\alpha$ im bereich der beschränkten formen. Proc. Conf. Complex analysis. Rice Univ. 1969. Rice Univ. studies. 1970, 56: 29～50

[He1] Henkin G M. Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains and some applications. Math. Sb. 1969, 78: 611～632. Engl. Transl. Math. USSR. Sb. 1969, 7: 597～616

[He2] ——. Integral representations of functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the $\bar{\partial}$-problem. Math. Sb. 1970, 82: 300～308. Engl. Transl. Math. USSR. Sb. 1970, 11: 273～281

[Hö1] Hörmander L. L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. Acta Math. 1965, 113: 89～152

[Hö2] ——. An introduction to complex analysis in several variables. 2 nd ed. Amsterdan: North Holland Publishing Co., 1973

[Hua] Hua L K (华罗庚). 多复变数函数论中的典型域的调和分析. 北京: 科学出版社, 1958

[Ki] Kikuchi K. Starlike and convex mappings in several complex variables. Pacific J. of Math. 1973, 44: 569～580

[Ko] Kohn J J. Harmonic integrals on strongly pseudo convex manifolds I. Ann. of Math. 1963, 78: 112～148

[Kr] Krantz S G. Function theory of several complex variables. New York: John Wiley & Sons, 1982

[Le1] Lelong P. Les fonctions plurisous harmoniques. Ann. Ec. Norm. Sup. 1945, 62: 301～338

[Le2] ——. La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. J. Math. pures appl. 1952, 31: 191～219

[Li] Lieb I. Die Cauchy-Riemannschen differential-gleichungen auf streng pseudokonvexen gebieten. Math. Ann. 1970, 190: 6～44

[Liu1] Liu T S (刘太顺). The growth theorems, covering theorems and distortion theorems for hiholomorphic mappings on classical domains. USTC thesis, 1989

[Liu2] ——. Distortion theorem on biholomorphic convex maps in the unit ball of $\mathbf{C}^n$. to appear.

[Lu1] Lu Q K (陆启铿). 多复变数与西几何. 数学进展. 1956, 2: 567～662

[Lu2] ——. 多复变函数引论. 北京: 科学出版社, 1961

[Lu3] ——. 典型流形与典型域. 上海: 上海科学技术出版社, 1963

[Mi] Miller J. Subordinating factor sequences and convex functions of sever-

al variables. Pacific J. of Math. 1976, 65: 159～165

[Na] Narasimhan R. Several complex variables. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1971

[No] Norguet F. Sur les domains d' holomorphie des fonctions uniforms de plusieurs variables complexes (passage du local au global). Bull. Soc. Math. France 1954, 82: 137～159

[Oka] Oka K. Collected papers. Transl. by R. Narasimhan with comments by H. Cartan, R. Remmert, ed. New York: Springer-Verlag, 1984

[Rm] Ramirez E. Ein divisions problem und randintegral darslellungen in der komplexen analysis. Math. Ann. 1970, 184: 172～187

[Rn] Range R M. Holomorphic functions and integral representations in several complex variables. New York: Springer-Verlag, 1986

[Ru1] Rudin W. Principles of mathematical analysis. New York: McGraw-Hill book company, 1976

[Ru2] ——. Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$. New York: Springer-Verlag, 1980

[Sh1] Shi J H (史济怀). A new proof of the polydisc's analytic nonequivalence to any ball. Kexue Tongbao (English Ed.). 1981, 26: 952～953

[Sh2] ——. On the bound of convexity of univalent maps of the ball. Kexue Tongbao (English Ed.). 1982, 27: 473～476

[Si] Siu Y T (肖荫堂). 多复变函数论讲义. 陈志华、钟家庆整理. 厦门大学数学系, 1979

[Su1] Suffridge T J. The principle of subordination applied to functions of several variables. Pacific J. of Math. 1970, 33: 241～248

[Su2] ——. Starlike and convex maps in Banach Spaces. Pacific J. of Math. 1973, 46: 575～589

[Th] Thomas C. Convex mappings from the unit ball in $\mathbf{C}^n$ into $\mathbf{C}^n$. Abstract of papers presented to A. M. S. 1990, 66: 46

[Xu] Xu S L (徐森林). 流形和 Stokes 定理. 北京: 人民教育出版社, 1981

[Zj] Zhong J Q (钟家庆). 多复分析基础. 北京大学数学系、中国科学院数

学研究所，1983

[Zt] Zhong T D(钟同德). 多复变函数的积分表示与多维奇异积分方程. 厦门：厦门大学出版社，1986

符 号 索 引

点　　集

函数和映射

名 词 索 引

中文词条按笔画排列，西文开头的词条按字母顺序排列.

七　画

八　画

九　画

十　画

十 一 画

十　二　画

十　三　画

十　四　画

十　五　画